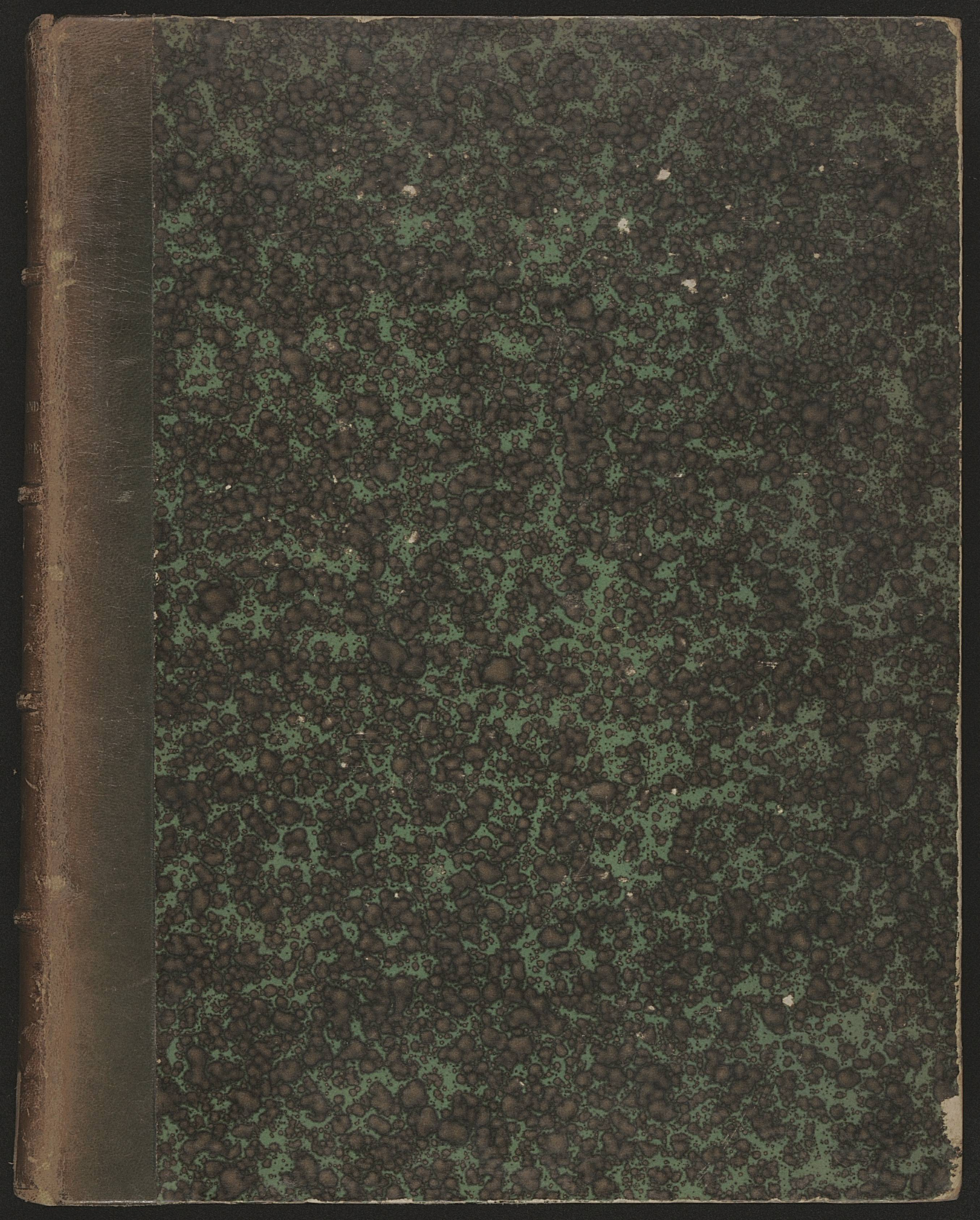
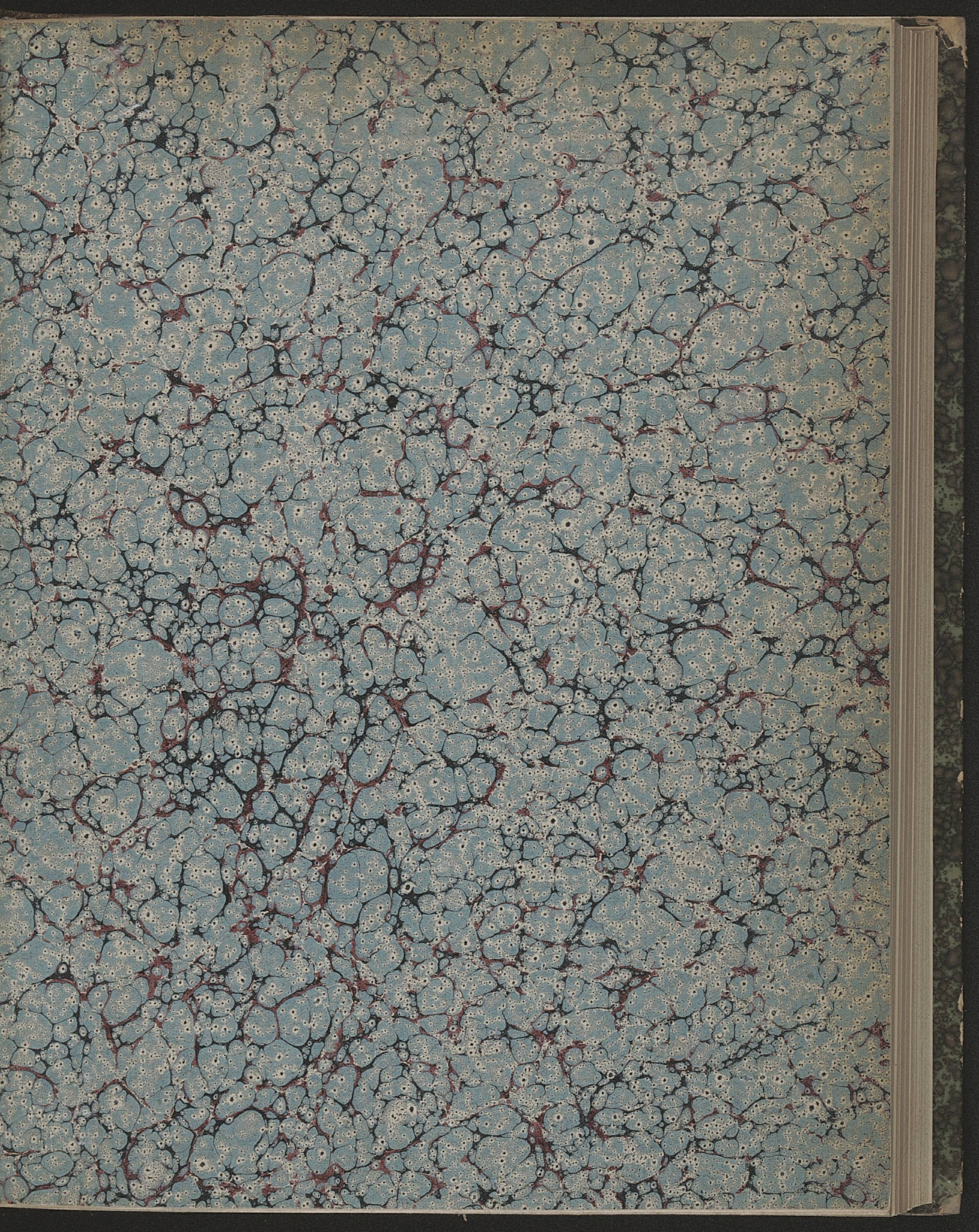
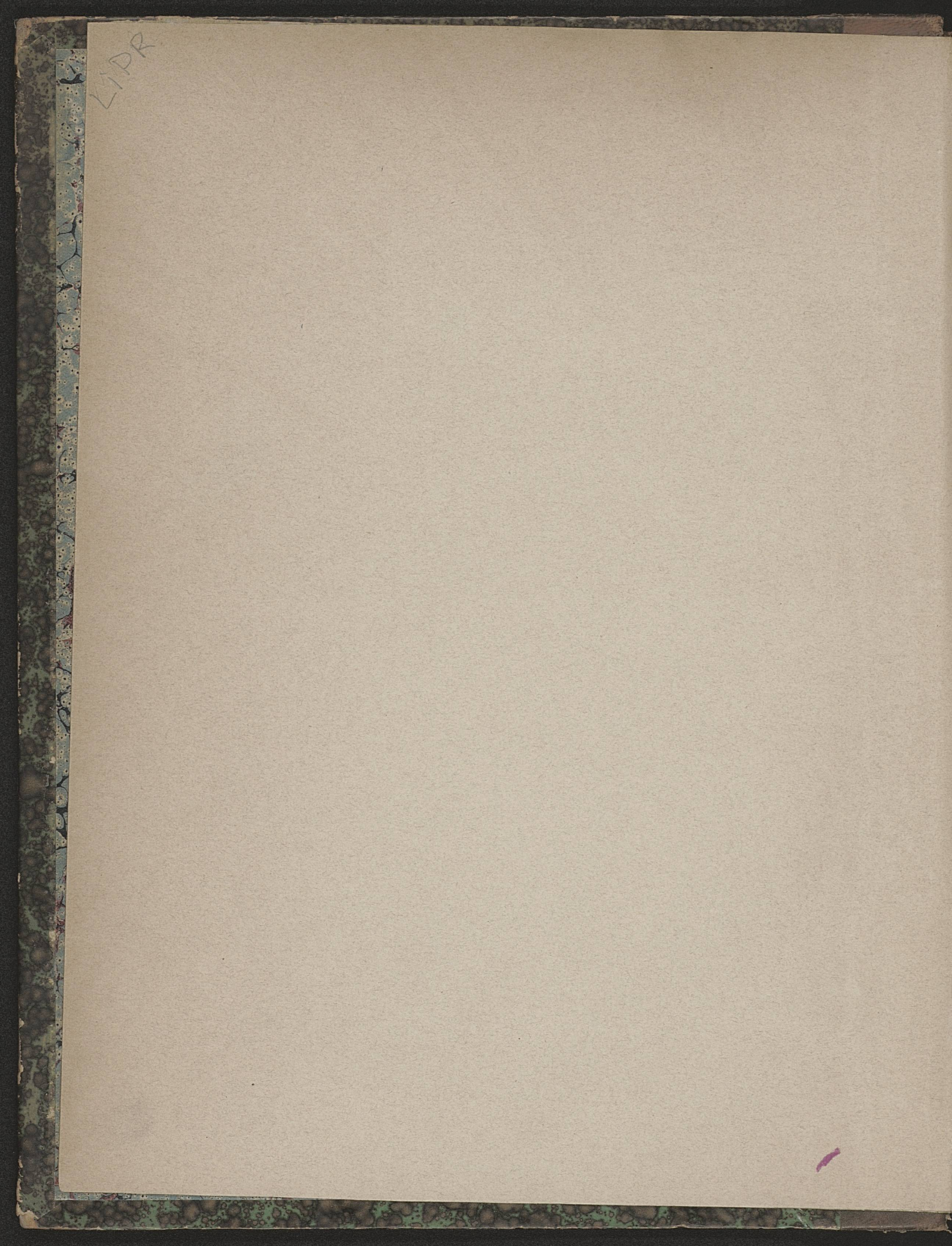
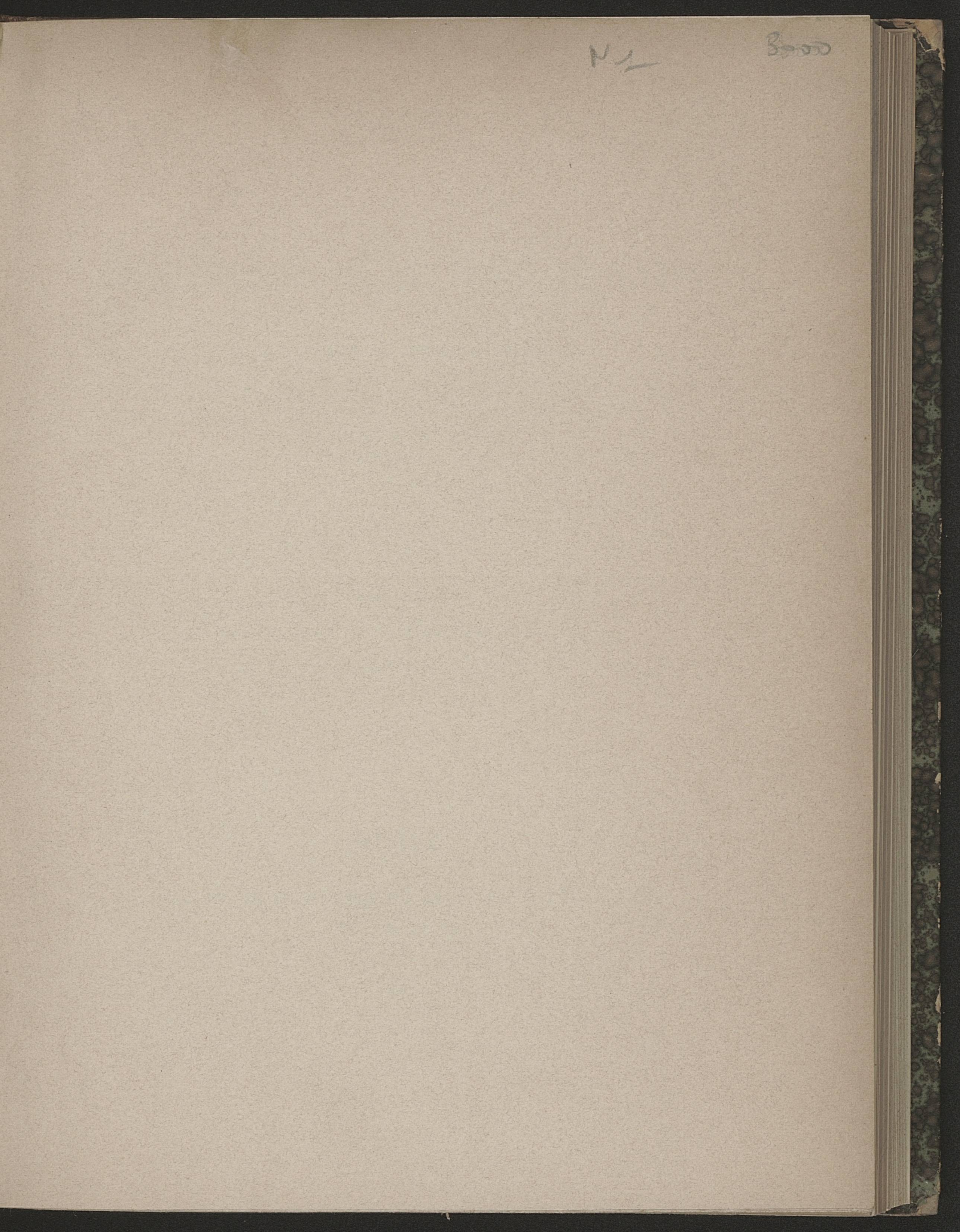







LIPR


N 1

MÉMOIRE

SUR LE

NOMBRE DE VALEURS QUE PEUT PRENDRE UNE FONCTION

QUAND ON Y PERMUTE LES LETTRES QU'ELLE RENFERME;

PAR M. J. BERTRAND,
Répetiteur d'Analyse à l'École royale Polytechnique.

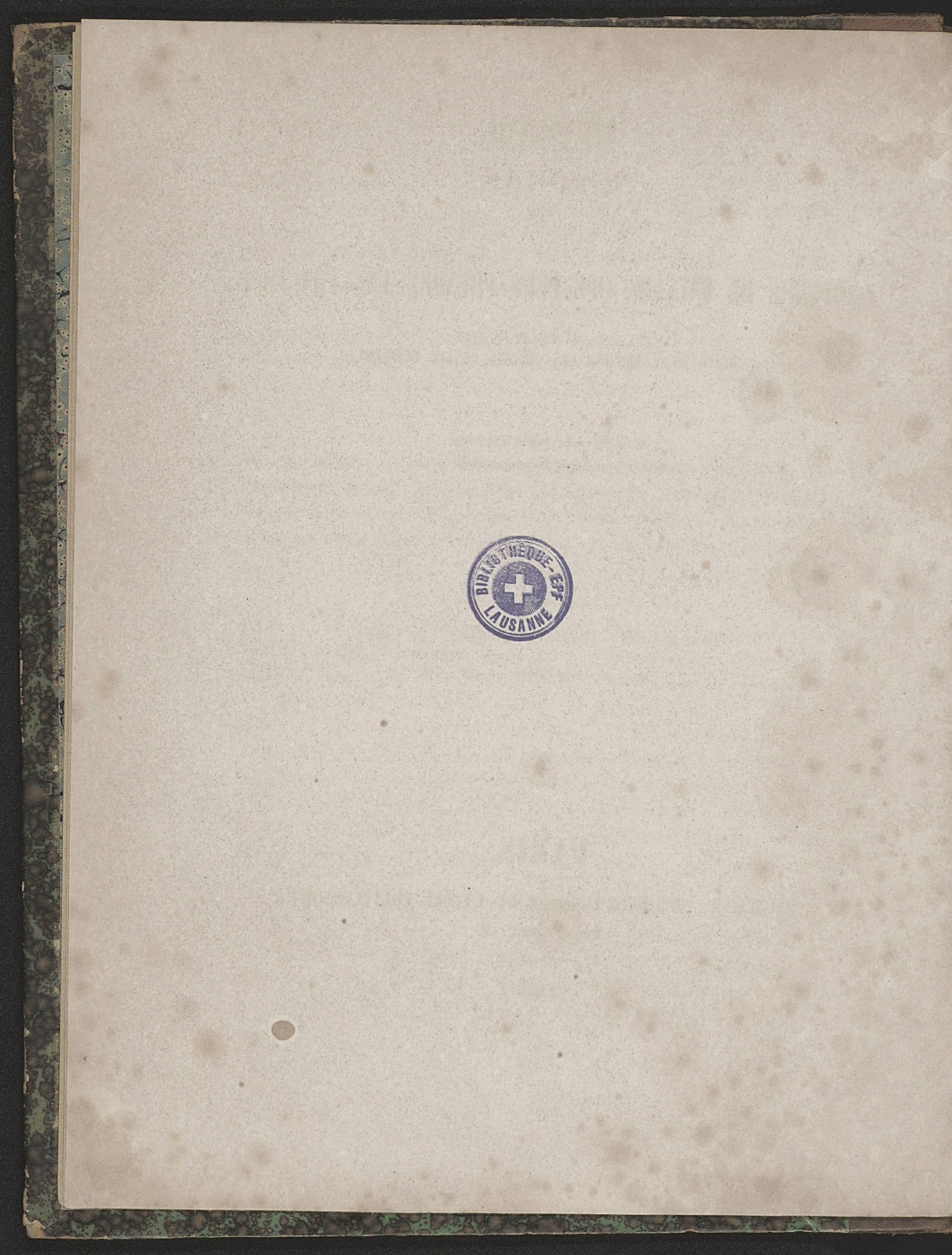
(Extrait du Journal de l'École royale Polytechnique, XXXe Cahier.)

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Rue du Jardinet, 12.

—

1845


BIBLIOTHÈQUE-EPF
LAUSANNE

MÉMOIRE

SUR LE

NOMBRE DE VALEURS QUE PEUT PRENDRE UNE FONCTION

QUAND ON Y PERMUTE LES LETTRES QU'ELLE RENFERME;

Par M. J. BERTRAND,

Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique.

Si une fonction renferme n variables distinctes et indépendantes les unes des autres, on pourra, en général, lui faire acquérir, par le changement de place de ces variables, un nombre de valeurs différentes égal au nombre même des permutations que ces n lettres peuvent présenter, c'est-à-dire égal à

$$1.2.3\ldots n.$$

Mais, dans certains cas particuliers, le nombre des valeurs peut être moins considérable, et l'on a même souvent l'occasion de considérer des fonctions *symétriques* qui n'éprouvent aucun changement par le déplacement de leurs lettres, et n'ont, par conséquent, qu'une seule valeur. Mais, entre ces limites extrêmes 1 et $1.2.3\ldots n$, il s'en faut de beaucoup que le nombre de valeurs que nous appellerons, avec M. Cauchy, l'indice de la fonction, puisse prendre toutes les valeurs intermédiaires. Cet indice doit remplir certaines conditions dont l'étude a déjà conduit les géomètres à plusieurs théorèmes curieux et utiles. On sait que les travaux de Rufini et d'Abel sur l'équation du cinquième degré sont fondés sur le nombre de valeurs qu'une fonction peut acquérir.

Lagrange est, je crois, le premier qui ait appelé l'attention des géomètres sur ce genre de questions, et quoiqu'il n'en ait pas considéré la théorie d'une manière générale, il a cependant énoncé un théorème important que l'on peut considérer comme le point de départ de tous les travaux faits depuis sur le même sujet. Ce théorème, dont la démonstration est, du reste,

bien simple, consiste en ce que le nombre des valeurs d'une fonction de n lettres est toujours un diviseur du produit $1.2\ldots n$.

Rufini, dans sa théorie des équations, a considéré spécialement les fonctions de cinq variables, et il est arrivé, par une méthode assez compliquée, à démontrer le théorème suivant :

Si une fonction de cinq variables a moins de cinq valeurs distinctes, elle ne peut en avoir plus de deux.

Quelques années plus tard, un compatriote de Rufini, Pietro Abatti, est revenu sur le même sujet, et dans un Mémoire intéressant (*Mémoires de la Société italienne,* tome X) il est parvenu à étendre la proposition de Rufini au cas d'un nombre quelconque de variables ; il a démontré que :

Si une fonction d'un nombre quelconque de variables a moins de cinq valeurs distinctes, elle ne peut en avoir plus de deux. Les fonctions de trois ou quatre lettres font seules exception.

Enfin, dans le tome X du *Journal de l'École Polytechnique,* M. Cauchy est allé plus loin que les géomètres dont je viens de parler, en prouvant que l'on pouvait substituer à la limite 5 le plus grand nombre premier, inférieur au nombre des lettres de la fonction ; en sorte que, p désignant ce nombre premier, l'indice d'une fonction ne peut jamais devenir inférieur à p sans être égal à 1 ou 2.

Le Mémoire suivant a pour but de montrer que la limite donnée par M. Cauchy peut elle-même être reculée, et que, en exceptant les fonctions de quatre lettres, si l'indice d'une fonction est supérieur au nombre 2, il est au moins égal au nombre de lettres de la fonction.

Dans le cas où une fonction de n lettres a plus de n valeurs, j'indique une seconde limite que son indice doit nécessairement atteindre; cette seconde limite est égale à $2n$ toutes les fois que n est plus grand que 9. Enfin, si l'indice surpasse $2n$, j'indique une troisième limite au-dessous de laquelle il ne peut jamais s'abaisser ; mais cette troisième limite, différente en cela des deux précédentes, ne peut pas, en général, être atteinte.

La démonstration que j'emploie conduit à un théorème déjà démontré par Abel, dans un cas particulier : *Si une fonction de n lettres n'a que n valeurs* (*), *elle est symétriquepar rapport à $n-1$ lettres.*

(*) Les fonctions de six lettres font exception.

I.

Soit

$$\varphi(a, b, c, d, \ldots, h, l)$$

une fonction de n lettres. Si parmi ces n lettres on en prend p au hasard, et qu'après les avoir rangées en cercle on mette chacune d'elles à la place de celle qui la précède, de telle sorte que la seconde devienne la première, la troisième la seconde, . . . , et enfin la première la dernière, on dit que l'on a fait subir à ces n lettres une permutation circulaire; si les lettres permutées sont en nombre p, la permutation circulaire est de l'ordre p.

Une permutation quelconque, si elle n'est pas circulaire, peut toujours être considérée comme résultant de plusieurs permutations circulaires effectuées simultanément sur des lettres différentes.

Supposons que l'on change d'une manière quelconque la place des différentes lettres

$$a, b, c, \ldots, h, i;$$

a, changeant de place, se substituera nécessairement à une autre lettre, c par exemple; c ira lui-même déplacer une troisième lettre, et, en continuant de cette manière, on trouvera nécessairement une lettre qui viendra occuper la place de a. Il est évident que les différentes lettres que l'on a ainsi rencontrées ont subi une permutation circulaire; car, si on les écrit en cercle dans l'ordre même où elles se sont présentées, chacune d'elles va occuper la place de celle qui la suit. En prenant une des lettres qui restent, et opérant de la même manière, on formera un nouveau groupe de lettres qui auront aussi subi une permutation circulaire, et ainsi de suite, jusqu'à ce que toutes les lettres soient épuisées.

Si, par exemple, on remplace respectivement les huit lettres

$$a, b, c, d, e, f, g, h,$$

par

$$c, e, b, f, a, g, h, d,$$

cette substitution équivaut aux deux permutations circulaires

$$\begin{pmatrix} a, & c, & b, & e \\ c, & b, & e, & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d, & f, & g, & h \\ f, & g, & h, & d \end{pmatrix}.$$

II.

Lorsqu'une fonction n'est pas changée par une permutation circulaire, effectuée sur un certain nombre de lettres, on pourra répéter cette permutation une seconde, une troisième fois sans que la fonction soit changée.

Si, par exemple, on a

$$\varphi(a,\ b,\ c,\ d) = \varphi(b,\ c,\ d,\ a),$$

et que cette égalité ait lieu pour des valeurs quelconques de a, b, c, d, on en conclura évidemment

$$\begin{aligned}\varphi(b,\ c,\ d,\ a) &= \varphi(c,\ d,\ a,\ b),\\ \varphi(c,\ d,\ a,\ b) &= \varphi(d,\ a,\ b,\ c),\\ \varphi(d,\ a,\ b,\ c) &= \varphi(a,\ b,\ c,\ d);\end{aligned}$$

car chaque fonction s'obtient de la précédente par des changements de lettres qui ne diffèrent que par le nom des lettres transposées.

Réciproquement, dans le cas où le nombre p des lettres auxquelles on fait subir une permutation circulaire est un nombre premier, si, en répétant cette permutation un nombre quelconque de fois inférieur à p, la valeur de la fonction n'est pas changée, on peut en conclure que cette permutation, opérée une seule fois, ne change rien à la valeur de la fonction.

Cette proposition, indiquée par Rufini et Abatti dans des cas particuliers, a été démontrée généralement par M. Cauchy, de la manière suivante :

Désignons, pour plus de simplicité, par

(1) $$A_p \quad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \ldots \quad A_{p-1}$$

les diverses permutations que l'on peut obtenir en faisant subir p fois de suite à la fonction donnée une même permutation circulaire d'ordre p; chacune de ces permutations s'obtiendra de la précédente par une transposition uniforme. Si maintenant la permutation A_1 donne à la fonction la

même valeur que la permutation A_r, on pourra répéter un nombre quelconque de fois la transposition au moyen de laquelle on fait passer les lettres de l'ordre A_1 à l'ordre A_r, et l'on obtiendra toujours la même valeur de la fonction. Or, pour trouver les permutations ainsi obtenues, il suffit évidemment de joindre de r en r les sommets du polygone (1). p étant un nombre premier, on sait que l'on rencontrera de cette manière tous les sommets; et, par suite, toutes les permutations $A_1, A_2, \ldots, A_p$, donnent la même valeur à la fonction.

III.

Si une fonction n'est changée par aucune substitution circulaire effectuée sur p lettres, elle ne sera pas changée non plus par une permutation circulaire de trois lettres.

Ce théorème, que j'emprunte au Mémoire de M. Cauchy, s'y trouve démontré de la manière suivante:

Soit

$$\begin{matrix} a, & b, & c, & d, & e,\ldots, & k, & l, \\ b, & c, & d, & e,\ldots, & k, & l, & a \end{matrix}$$

une substitution circulaire d'ordre p (chaque lettre de la seconde ligne doit être substituée à celle qui se trouve placée au-dessus), la substitution

$$\begin{matrix} b, & c, & d,\ldots, & k, & l, & a, \\ c, & a, & b, & d,\ldots, & k, & l \end{matrix}$$

sera aussi une substitution circulaire de p lettres; car on peut l'écrire ainsi:

$$\begin{matrix} b\ c\ a\ l\ k\ldots\ d, \\ c\ a\ l\ k\ldots\ldots\ b. \end{matrix}$$

Or, par hypothèse, ces deux substitutions ne changent rien à la valeur de la fonction; donc on peut les opérer successivement, et, par conséquent, substituer respectivement aux lettres $a, b, c, d,\ldots, k, l$,

$$c,\ a,\ b,\ d,\ldots,\ k,\ l;$$

ou, en effaçant les lettres qui n'ont pas changé de place, on voit que l'on

peut substituer c, a, b à a, b, c, c'est-à-dire effectuer sur ces trois lettres, qui sont quelconques, une permutation circulaire; ce qu'il fallait démontrer.

IV.

Si une fonction jouit de la propriété précédente et n'est changée par aucune des substitutions circulaires de trois lettres, elle ne peut avoir plus de deux valeurs.

Si l'on désigne, en effet, sous le nom de transposition la substitution circulaire effectuée sur deux lettres, qui consiste simplement à les changer l'une dans l'autre, chaque substitution circulaire de trois lettres pourra être remplacée par deux transpositions effectuées successivement. Ainsi, par exemple, la substitution

$$\left\{ \begin{matrix} a, & b, & c, \\ c, & a, & b \end{matrix} \right. \tag{1}$$

pourra être remplacée par le changement successif de a en b et b en a, puis de b en c et c en b. Si donc la substitution (1) ne change pas la fonction, il en sera de même des transpositions (a, b), (b, c) opérées successivement, et, par suite, la transposition (a, b) ne pourra changer k_1 en k_2 sans que la transposition (b, c) change k_2 en k_1, et par conséquent aussi k_1 en k_2; car une même transposition répétée deux fois de suite remet toutes les lettres à la place où elles étaient, et doit, par conséquent, rendre à la fonction sa valeur primitive.

Il résulte de là que deux transpositions (a, b), (b, c) qui ont une lettre commune b, opérées sur une même fonction, y produisent toutes deux le même changement. On en conclut que les transpositions (b, c), (c, d) sont aussi équivalentes, et, par suite, que deux transpositions quelconques (a, b), (c, d), qui n'ont aucune lettre commune, produisent le même changement sur les fonctions. Si k_1 est une première valeur de la fonction, toutes les transpositions lui feront donc acquérir une même valeur k_2 et changeront, par suite, k_2 en k_1. Or une substitution quelconque peut s'obtenir par une série de transpositions qui ne pourront jamais donner naissance qu'aux deux valeurs k_1 et k_2, suivant que leur nombre sera pair ou impair. La fonction ne peut donc avoir que deux valeurs différentes, k_1 ou k_2.

Tout ce qui précède est connu. Nous ajouterons, comme corollaire évident de la démonstration précédente, qu'une fonction qui reste invariable par toutes les permutations de trois lettres doit toujours changer, lorsqu'elle n'est pas symétrique, par une transposition effectuée sur deux lettres quelconques.

V.

La limite inférieure que nous venons de donner, d'après M. Cauchy, pour le nombre des valeurs d'une fonction, n'est pas la plus élevée que l'on puisse trouver. *Si l'on excepte les fonctions de quatre lettres qui peuvent n'avoir que deux valeurs, l'indice d'une fonction de n lettres ne peut jamais être à la fois plus grand que 2 et plus petit que n.*

Pour démontrer cette proposition, j'admettrai comme un fait que, quel que soit un nombre n supérieur à 6 (*), il existe toujours un nombre premier, au moins, compris entre $n-2$ et $\frac{n}{2}$. Cette proposition est vraie pour tous les nombres inférieurs à six millions, et tout porte à croire qu'elle est générale. Quoi qu'il en soit, notre démonstration s'appliquera au moins à toutes les fonctions dont le nombre de lettres sera inférieur à cette limite.

Soient

$$\varphi(a, b, \ldots, k, l)$$

une fonction de n lettres ayant moins de n valeurs, et p un nombre premier compris entre $n-2$ et $\frac{n}{2}$. Si l'on forme avec les n lettres $a, b, \ldots, k, l$ deux groupes quelconques, l'un de p, l'autre de deux lettres, je dis qu'en opérant sur chacun de ces groupes une permutation circulaire, il s'en trouvera une au moins sur les deux qui ne changera pas la fonction.

Si l'on répète, en effet, p fois la permutation circulaire du premier groupe, on obtiendra p arrangements différents des p lettres qui le composent, et, en combinant ces p arrangements avec les deux que l'on peut obtenir en transposant les deux lettres du second groupe, nous obtiendrons $2p$ arrangements différents des n lettres de notre fonction; et comme, par hypothèse, on a $2p > n$, il faudra que deux au moins de ces arrangements donnent la même valeur à la fonction. On peut faire trois hypothèses:

(*) Les fonctions de six lettres ont été traitées à part par M. Cauchy (*voir* le Mémoire déjà cité).

1°. Les deux arrangements qui donnent à la fonction la même valeur correspondent à un même arrangement des p lettres du premier groupe et ne diffèrent que par la place des deux lettres du second groupe. Dans ce cas, il est clair que, pour passer d'un arrangement à l'autre, il suffit de transposer ces deux dernières lettres, et que, par suite, leur transposition ne change pas la fonction.

2°. Si les deux arrangements correspondent, au contraire, à un même arrangement des deux lettres du second groupe et ne diffèrent que par la disposition de celles du premier, la fonction conserve la même valeur quand on répète un certain nombre de fois une substitution circulaire de p lettres, et il en résulte (§ II) que cette substitution opérée une seule fois laisse la fonction invariable.

3°. Enfin, les deux valeurs égales de la fonction peuvent correspondre à des arrangements qui diffèrent tant par la place qu'occupent les p premières lettres que par celle des deux dernières.

Soient, par exemple,

$$(1) \qquad a, b, c, d, e, f, \ldots, h, i \;\big|\; k, l,$$
$$(2) \qquad d, e, f, \ldots, h, i, a, b, c \;\big|\; l, k$$

ces deux arrangements.

Si l'on répète une seconde fois la transposition au moyen de laquelle on passe du système (1) au système (2), les lettres k et l reprendront leurs places primitives, et les p premières lettres formeront un arrangement différent de (1); car on a vu (§ II) que, pour revenir à l'arrangement primitif, il faudrait répéter p fois de suite cette substitution. Nous rentrons ainsi dans le cas précédent, car nous avons deux permutations qui donnent la même valeur à la fonction, et dans lesquelles k et l occupent les mêmes places. Ces permutations ne diffèrent que par la disposition des p premières lettres, sur lesquelles on a opéré un certain nombre de substitutions circulaires. Nous prouverons donc, comme précédemment, que la substitution circulaire de p lettres ne change pas la fonction. On verrait facilement que, dans ce cas, la transposition des deux lettres k et l laisse aussi la fonction invariable; mais, comme cette remarque ne servirait pas dans la suite de la démonstration, il est inutile de la développer.

Il est donc démontré que, dans tous les cas, si une fonction de n lettres a moins de n valeurs, et qu'on désigne par p un nombre premier compris entre $n - 2$ et $\frac{n}{2}$, on peut prendre au hasard deux groupes, l'un de p, l'autre de deux lettres. En faisant subir à chacun de ces groupes une substitution circulaire, l'une au moins des deux substitutions laisse la fonction identique.

VI.

On déduit du théorème précédent celui qui fait l'objet principal de ce Mémoire:

Une fonction de n lettres ne peut avoir plus de deux et moins de n valeurs.

Si, en effet, la fonction

$$\varphi(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ldots,\ k,\ l)$$

a moins de n valeurs, et plus de deux valeurs, cette fonction n'étant pas symétrique, il est évident qu'il doit exister au moins deux lettres dont la transposition change la valeur de la fonction. Soient a et b ces deux lettres. Si p est un nombre premier compris entre $\frac{n}{2}$ et $n - 2$, en laissant de côté les lettres a et b, il en restera au moins $p + 1$; et, d'après le théorème précédent, on pourra en prendre p au hasard, et une substitution circulaire effectuée sur ces p lettres laissera la fonction invariable.

En appliquant mot à mot la démonstration des §§ III et IV, on en conclura que la fonction proposée ne peut acquérir plus de deux valeurs distinctes par le changement de lettres autres que a et b. Supposons successivement que le nombre de ces valeurs soit 1 ou 2 :

1°. La fonction $\varphi(a,\ b,\ c,\ d,\ldots,\ k,\ l)$ est symétrique par rapport aux lettres $c,\ d,\ldots,\ k,\ l$.

Je dis que, dans ce cas, si elle a plus d'une valeur, elle en a n au moins; et d'abord si la fonction a moins de n valeurs, elle sera évidemment changée par toute transposition de l'une des lettres a ou b avec $c,\ d,\ldots,\ k,\ l$. Si, en effet, on pouvait faire une pareille transposition entre les lettres a et d par exemple, il en résulterait que ces lettres entrent de la même manière, et la fonction étant déjà symétrique par rapport à $c,\ d,\ldots,\ k,\ l$, le serait par

rapport à $a, c, d, \ldots, k, l$, c'est-à-dire par rapport à $n - 1$ lettres; dans ce cas, il est évident que la fonction a précisément n valeurs. On peut aussi démontrer que si les lettres a et b sont remplacées à la fois par deux autres lettres, c et d par exemple, la valeur de la fonction changera nécessairement. En effet, l'égalité

$$\varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l) = \varphi(c, d, a, b, \ldots, k, l)$$

est impossible; car le premier membre est, par hypothèse, symétrique par rapport aux lettres c et d, tandis que le second ne l'est pas [il a été supposé que les transpositions (a, b) changent le premier membre, et, par suite, la transposition (c, d) doit changer le second].

On voit aussi qu'on ne peut pas avoir

$$\varphi(a, b, c, d, \ldots, k, l) = \varphi(b, c, a, d, \ldots, k, l);$$

l'impossibilité résulte de ce que le premier membre est symétrique par rapport aux lettres c et d, tandis que le second ne l'est pas.

D'après les remarques précédentes, on voit que la fonction φ a autant de valeurs que l'on peut faire de combinaisons de deux lettres avec les n lettres données, c'est-à-dire $n(n - 1) > n$.

Il est donc démontré que, dans cette première hypothèse, la fonction ne peut avoir moins de n valeurs; et si elle en a n, il faut qu'elle soit symétrique par rapport à $(n - 1)$ lettres.

2°. Supposons maintenant que la fonction φ puisse acquérir 2 valeurs par la permutation des $n - 2$ lettres $b, c, d, \ldots, k, l$. Dans cas, il a été remarqué, à la fin du § IV, que toute transposition opérée sur deux de ces lettres doit nécessairement changer la fonction. Prenons alors p lettres au hasard, parmi les n lettres $a, b, c, d, \ldots, k, l$, je dis qu'une permutation circulaire, opérée sur ces p lettres, ne pourra jamais changer la valeur de la fonction, et que, par suite, d'après le théorème de M. Cauchy, cette fonction n'a que deux valeurs.

Si parmi les p lettres il ne se trouve ni a ni b, la proposition est vraie par hypothèse. Si l'une de ces lettres ou toutes les deux font partie du groupe, il n'y aura dans ce groupe que $p - 1$ lettres, au plus, prises parmi $c, d, \ldots, k, l$; et, par conséquent, puisque $n > p + 2$, il restera au moins

deux de ces dernières lettres qui ne feront pas partie du groupe considéré. Or la transposition de ces deux lettres change la valeur de la fonction, et, par suite, d'après le § V, la substitution circulaire opérée sur les p lettres ne doit pas la changer; car, de deux groupes, l'un de deux, l'autre de p lettres, il y en a un au moins dont les substitutions circulaires ne produisent aucun changement.

On peut donc prendre p lettres au hasard, et leur faire subir une substitution circulaire, cette substitution ne changera pas la fonction : donc, d'après le théorème de M. Cauchy, le nombre des valeurs ne peut surpasser deux.

Ainsi, dans cette seconde hypothèse, φ ne peut avoir que deux valeurs.

En rapprochant ce résultat du précédent, nous sommes conduit au théorème suivant :

Une fonction de n lettres ne peut avoir moins de n valeurs, sans en avoir une ou deux seulement.

Si une fonction de n lettres n'a que n valeurs, elle est symétrique par rapport à $n-1$ lettres.

La démonstration précédente prouverait, sans qu'il fût nécessaire d'y rien changer, qu'une fonction de n lettres qui a plus de n valeurs en a au moins $2p$, p étant le plus grand nombre premier inférieur à $n-2$.

Les fonctions de quatre et six lettres sont exclues, parce qu'il n'existe pas de nombre premier compris entre $\frac{4}{2}$ et $4-2$, ni entre $\frac{6}{2}$ et $6-2$.

VII.

Le problème général qu'il est naturel de se proposer dans la théorie qui nous occupe serait de déterminer, parmi les diviseurs du produit

$$1.2\ldots n,$$

quels sont ceux qui peuvent représenter le nombre de valeurs d'une fonction de n lettres. Le résultat précédent est loin de répondre d'une manière complète à cette question qui, je l'avoue, me paraît très-difficile. J'ajouterai cependant quelques recherches qui donnent de nouveaux cas d'impossibilité et reculent encore la limite du nombre des valeurs des fonctions, lorsque ce nombre est plus grand que n.

Soient

$$\varphi(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ldots,\ g,\ h,\ i,\ j,\ k,\ l)$$

une fonction de n lettres, p et q deux nombres premiers, tels que $p+q<n$; je dis que si la fonction a un nombre de valeurs moindre que $p\times q$, elle en a n ou $2n$.

Si parmi les n lettres de la fonction on prend, au hasard, deux groupes, l'un de p, l'autre de q lettres, et qu'on fasse subir à chacun de ces groupes une permutation circulaire, l'une au moins des deux substitutions laisse la fonction invariable. Répétons, en effet, p fois la première substitution, et q fois la seconde; en combinant les permutations ainsi obtenues, nous aurons un nombre de dispositions différentes de $p+q$ lettres égal à $p\times q$, et, par conséquent, deux au moins des deux substitutions donneront à la fonction des valeurs égales.

Si, dans ces deux permutations, les lettres de l'un des deux groupes occupent les mêmes places, on déduira, des paragraphes précédents, que la transposition circulaire de l'autre groupe ne change pas la fonction.

Si les deux permutations, qui donnent à la fonction la même valeur, diffèrent à la fois par la place qu'occupent les lettres des deux groupes, on pourra passer de l'une à l'autre en faisant subir à chaque groupe un certain nombre de permutations circulaires successives; et alors, d'après le § II, si l'on répète p fois la substitution nécessaire pour passer de l'une de ces dispositions à l'autre, les lettres du premier groupe reprendront leurs places primitives, et l'on aura deux permutations qui donneront la même valeur à la fonction, et ne différeront que par la place des q lettres du second groupe. D'ailleurs ces q lettres ont nécessairement une disposition différente, puisque l'on a répété p fois la transposition équivalente à un certain nombre de permutations circulaires successives, et que, pour rendre à ces différentes lettres leur place primitive, il aurait fallu la répéter q fois.

On conclut de là que la substitution circulaire effectuée sur les q lettres ne change pas la fonction; on verrait de même qu'elle n'est pas changée par la substitution circulaire opérée sur les p lettres restantes.

Il est donc démontré que, dans tous les cas, l'une au moins des deux substitutions ne change pas la fonction.

Ce premier résultat admis, si la fonction a plus de deux valeurs, on sait qu'elle ne peut pas rester invariable pour toutes les permutations circulaires

de p lettres, et, par suite, on pourra toujours trouver au moins un groupe de p lettres dont les permutations circulaires changeront la fonction. En désignant ces lettres par $a, b, \ldots, f$, il résulte du théorème précédent que toute permutation circulaire opérée sur q des lettres restantes ne changera pas la fonction qui, par conséquent, d'après les §§ III et IV, ne pourra acquérir que deux valeurs par les changements opérés sur ces $n - p$ lettres.

Nous avons donc ce théorème :

Si une fonction de n lettres a un indice inférieur au produit $p \times q$, *p et q étant deux nombres premiers tels que* $p + q < n$, *il existe, au moins,* $n - p$ *lettres par le changement desquelles la fonction ne peut acquérir que deux valeurs.*

La démonstration précédente suppose seulement qu'il soit possible de faire avec les p lettres $a, b, c, \ldots, f$ une substitution circulaire qui change la valeur de la fonction. D'après cette hypothèse, la fonction φ pourra acquérir p valeurs, au moins, par les changements de ces p lettres les unes dans les autres, et, p étant plus grand que 2, il résulte du § IV, que l'on pourra choisir trois lettres a, b, c, parmi les p lettres en question, de telle manière qu'une permutation circulaire de ces trois lettres change la valeur de la fonction. Or, il est facile de voir que si, avec ces trois lettres a, b, c on en prend $p-3$ autres au hasard, il existera au moins une permutation circulaire des p lettres, ainsi définies, qui changera la fonction. Car, si toute substitution circulaire de ces p lettres laissait la fonction invariable, il en serait de même de la substitution circulaire opérée sur trois quelconques d'entre elles. Nous sommes donc assuré que, par les changements des $n-p$ lettres restantes, la fonction ne peut avoir que deux valeurs. Or, les $n - p$ lettres restantes peuvent être toutes celles que l'on voudra, à l'exception de a, b, c, et, par suite, nous avons ce second résultat :

Si une fonction de n lettres a un nombre de valeurs moindre que $p \times q$, *p et q étant définis comme dans le théorème précédent, il existe au moins* $n - 3$ *lettres par les transpositions desquelles la fonction n'acquiert que deux valeurs.*

Les trois lettres désignées par a, b, c, dans la démonstration précédente, ne sont assujetties à d'autre condition que celle de changer la valeur de la fonction, quand on opère sur elles une permutation circulaire. La fonction

ayant plus de deux valeurs, il existe au moins deux groupes de trois lettres qui jouissent de cette propriété. Si, en effet, toutes les substitutions circulaires opérées sur trois lettres autres que a, b, c laissaient la fonction invariable, on prouverait, en appliquant la démonstration de M. Cauchy (§ IV), que les transpositions (a, b), (b, d) sont équivalentes, quelle que soit la lettre d, et qu'il en est de même des transpositions (b, d), (b, c). Donc la transposition (a, b) serait équivalente à (b, c), et, par suite, la substitution circulaire

$$\begin{matrix} a, & b, & c, \\ c, & a, & b, \end{matrix}$$

qui équivaut aux deux transpositions (b, c), (a, b) opérées successivement, laisserait la fonction invariable; ce qui est contre l'hypothèse.

Nous sommes donc assuré qu'il existe au moins un autre groupe de trois lettres qui jouit de la même propriété que a, b, c, et, par suite, un autre groupe de $n-3$ lettres dont les permutations ne donnent que deux valeurs à la fonction. Ces deux groupes de $n-3$ lettres renferment à eux deux $n-2$ lettres au moins, et, par suite, on verra très-facilement que les permutations de ces $n-2$ lettres ne peuvent donner que deux valeurs à la fonction.

Nous avons donc ce troisième résultat :

Si une fonction de n lettres a moins de $p \times q$ valeurs distinctes, p et q étant premiers et tels que $p+q<n$, cette fonction sera de la forme

$$\varphi(a, b, c, d, e, \ldots, k, l),$$

φ étant telle, que les permutations de $c, d, \ldots, k, l$ ne lui font acquérir que deux valeurs.

Il est facile de voir que φ ne peut pas être symétrique par rapport à $c, d, e, \ldots, k, l$ et doit nécessairement acquérir deux valeurs par la permutation de ces lettres. Si, en effet, une fonction est symétrique par rapport à $n-2$ lettres, et qu'elle ne le soit pas par rapport à $n-1$, le nombre de ses valeurs est précisément $n.n-1$ ou $\frac{n.n-1}{2}$, et, par suite, plus grand que $p \times q$.

VIII.

Abel a donné, dans un de ses Mémoires, la forme générale des fonctions qui n'acquièrent que deux valeurs lorsqu'on y permute les quantités qu'elles renferment.

Pour obtenir cette expression, nommons v et v' deux fonctions dont chacune soit susceptible de deux valeurs différentes seulement. En désignant par $v_1 v_2$, $v'_1 v'_2$ ces doubles valeurs, les deux expressions

$$v_1 + v_2, \quad v_1 v'_1 + v_2 v'_2$$

seront des fonctions symétriques.

Soient

$$v_1 + v_2 = t, \quad v_1 v'_1 + v_2 v'_2 = t_1,$$

on en tire

$$v_1 = \frac{tv'_2 - t_1}{v'_2 - v'_1}.$$

Supposons la fonction v' tellement choisie que ses deux valeurs ne diffèrent que par le signe (on sait que cela est toujours possible), nous aurons alors

$$v'_2 - v'_1 = -2v'_1$$

et

$$v_1 = \frac{t_1 + v'_1 t}{2v'_1} = \frac{t}{2} + \frac{t}{2v'^2_1} v'_1;$$

$\frac{t}{2}$ est symétrique, $\frac{t_1}{2v'^2_1}$ est également symétrique; en sorte qu'en posant

$$\frac{t}{2} = p, \quad \frac{t_1}{2v'^2_1} v'_1 = q,$$

on aura

$$v_1 = p + q,$$

p étant une fonction symétrique et q une fonction susceptible seulement de deux valeurs égales et de signe contraire.

Il résulte de là et du paragraphe précédent, que la forme la plus générale des fonctions de n lettres dont l'indice est inférieur à $p \times q$ est

$$\varphi = \mathrm{F}(a, b, c, d, \ldots, k, l) + f(a, b, c, d, \ldots, k, l),$$

F étant symétrique par rapport à $c, d, \ldots, k, l$, et f susceptible de deux valeurs égales et de signe contraire par le changement de ces $n-2$ lettres.

Je dis que, si l'on a $n > 5$, le nombre des valeurs des fonctions F et f ne peut être supérieur à celui de la fonction φ; et pour cela, je montrerai que, si φ prend deux fois la même valeur, F et f doivent aussi séparément redevenir les mêmes.

Supposons, en effet,

$$(1)\quad \begin{cases} F(a, b, c, \ldots, k, l) + f(a, b, c, d, \ldots, k, l) \\ = F(c, d, a, b, \ldots, k, l) + f(c, d, a, b, \ldots, k, l). \end{cases}$$

Prenons deux lettres k et l qui, dans aucun des deux membres, n'occupent une des deux premières places; cela est toujours possible, puisque n est plus grand que 5. Transposons ces deux lettres k et l; F ne changera pas et f changera de signe (§ IV), en sorte que l'équation (1) deviendra

$$(2)\quad F(a, b, c, \ldots, k, l) - f(a, b, \ldots, k, l) = F(c, d, a, \ldots, k, l) - f(c, d, \ldots, k, l);$$

et des deux équations (1) et (2) on tirera

$$F(a, b, \ldots, k, l) = F(c, d, \ldots, k, l),$$
$$f(a, b, \ldots, k, l) = f(c, d, \ldots, k, l).$$

Il en résulte, comme nous l'avons annoncé, que F et f ne peuvent avoir un nombre de valeurs supérieur à celui de φ.

Or, F étant symétrique par rapport à $n-2$ lettres ne peut avoir moins de $\frac{n.\overline{n-1}}{2}$ valeurs, à moins d'être symétrique par rapport à $n-1$ lettres; et comme $\frac{n.\overline{n-1}}{2}$ est évidemment supérieur à $p \times q$, la fonction F doit nécessairement être symétrique à $n-1$ lettres. On peut faire le même raisonnement sur la fonction $(f)^2$, qui est évidemment symétrique par rapport à $n-2$ lettres. Nous en conclurons qu'il existe $n-1$ lettres au moins dont les permutations ne peuvent donner à f que des valeurs égales et de signe contraire.

D'après cela, la fonction φ prend la forme

$$F(a, b, c, \ldots, k, l) + f(a, b, c, \ldots, k, l),$$

F étant une fonction symétrique par rapport à $n-1$ lettres, et f susceptible de deux valeurs égales et de signe contraire quand on permute $(n-1)$ des lettres qu'elle renferme.

On peut faire trois hypothèses sur la forme des fonctions F et f:

1°. Les lettres qui n'entrent pas de la même manière que les autres dans les fonctions F et $(f)^2$ sont les mêmes.

Dans ce cas, il est clair que le nombre des valeurs de $F+f$ est précisément $2n$, car la fonction F a n valeurs à chacune desquelles correspondent deux valeurs de f, et, d'après ce qu'on a vu plus haut, les sommes qui répondent à deux valeurs distinctes de F sont nécessairement différentes.

Ainsi, dans ce premier cas, la fonction φ a $2n$ valeurs.

2°. Les lettres qui n'entrent pas de la même manière dans F et f sont des lettres différentes. On a, dans ce cas,

$$\varphi = F(a, b, c, \ldots, k, l) + f(b, a, c, \ldots, k, l),$$

F étant symétrique par rapport à $b, c, \ldots, k, l$, et f susceptible de deux valeurs égales et de signe contraire par les permutations de $a, c, \ldots, k, l$.

On peut concevoir au plus $2n(n-1)$ valeurs à la fonction φ. Ces valeurs correspondent aux n valeurs de F combinées avec $2(n-1)$ valeurs correspondantes de f (a occupant la première place dans F, on peut mettre à la première place dans f l'une quelconque des $n-1$ autres lettres); or, je dis que ces $2n(n-1)$ valeurs ne peuvent se réduire à un nombre moindre. Nous avons vu, en effet, que si deux valeurs de φ sont égales entre elles, elles doivent correspondre à une même valeur de F. Or, deux valeurs de F ne peuvent être les mêmes si l'on a changé la lettre qui occupe la première place; on en conclurait, en effet, que F serait symétrique par rapport aux n lettres $a, b, c, \ldots, k, l$.

On prouvera la même chose de f^2, par suite de f. Or, les $2n(n-1)$ valeurs dont nous avons parlé diffèrent par la place de la première lettre, soit dans F, soit dans f; donc elles sont distinctes, et, par suite, le nombre des valeurs de φ serait

$$2n(n-1) > pq.$$

Comme ce résultat est contraire à l'hypothèse, il en résulte que le deuxième cas que nous venons de considérer ne peut pas se présenter.

3°. L'une des fonctions F et (f^2) est tout à fait symétrique et susceptible d'une seule valeur quand on y permute les n lettres qu'elle renferme. Ces deux hypothèses réduisent évidemment à $2n$ le nombre des valeurs de φ.

Nous concluons donc enfin qu'une fonction de n lettres qui a moins de $p \times q$ valeurs, p et q étant deux nombres premiers dont la somme est inférieure à n, a précisément $2n$ valeurs.

La démonstration précédente suppose $n > 5$ et $p \times q > 2n$, condition qui est toujours remplie si n est plus grand que 9.

RECHERCHES

SUR

LES FONCTIONS ALGÉBRIQUES,

PAR M. V. PUISEUX,
Maître de Conférences à l'École Normale.

[Extrait du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome XV, 1850.]

PREMIÈRE PARTIE.

1. Lorsqu'une fonction u d'une variable z réelle ou imaginaire est définie par une équation algébrique

$$f(u, z) = 0,$$

il ne suffit pas d'attribuer à la variable une valeur particulière pour que la fonction soit complétement déterminée; car l'équation proposée fournira, en général, plusieurs valeurs de u pour chaque valeur de z : il faut encore faire connaître laquelle de ces valeurs on doit choisir, si l'on veut que la fonction u soit définie sans ambiguïté.

Soit, par exemple, l'équation

$$u^2 - z = 0$$

l'équation dont il s'agit; la valeur de z étant représentée par $re^{t\sqrt{-1}}$, où r est positif et t réel, les deux valeurs correspondantes de u seront $r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{2}\sqrt{-1}}$, $-r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{2}\sqrt{-1}}$, en désignant par $r^{\frac{1}{2}}$ la valeur arithmétique de la racine carrée de r. Pour achever de définir la fonction, on pourrait convenir de prendre pour t un angle compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et d'adopter constamment pour u l'une des deux formules écrites ci-dessus, $r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{2}\sqrt{-1}}$, par exemple. Mais cette convention, qu'il serait

difficile d'étendre à des équations d'un degré quelconque, a encore cet inconvénient, que u devient alors une fonction discontinue de z. En effet, attribuons à cette variable les deux valeurs $re^{(\pi-\varepsilon)\sqrt{-1}}$, $re^{(-\pi+\varepsilon)\sqrt{-1}}$, qui différeront infiniment peu si ε désigne un infiniment petit positif; les valeurs correspondantes de u, savoir : $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\pi-\varepsilon}{2}\sqrt{-1}}$, $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{-\pi+\varepsilon}{2}\sqrt{-1}}$, différeront d'une quantité finie et sensiblement égale à $2r^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$.

2. On évitera cette discontinuité en définissant autrement la fonction u. Reprenons l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

dont nous pouvons supposer le premier membre entier en u et z, donnons à z une valeur initiale quelconque c, et, pour la valeur initiale b de u, choisissons une quelconque des racines de l'équation

$$f(u, c) = 0.$$

Concevons maintenant que z varie d'une manière continue à partir de la valeur c, et atteigne une autre valeur k; M. Cauchy a démontré (*Nouveaux Exercices de Mathématiques*, tome II, page 109) que les diverses valeurs de u varient en même temps d'une manière continue. Il y en aura donc une qui, d'abord égale à b, aura passé par degrés infiniment petits à une valeur déterminée h qu'elle atteindra pour $z = k$. Cette valeur de u sera pour nous une fonction de z, et, comme on le voit, une fonction continue; mais sa détermination, pour une valeur particulière de z, dépendra tout à la fois et de cette valeur même et de la série des valeurs par lesquelles z a passé à partir de sa valeur initiale.

Observons toutefois que la fonction cesserait d'être déterminée, si, en passant de la valeur c à la valeur k, z prenait une des valeurs qui font acquérir à l'équation

$$f(u, z) = 0$$

des racines égales. Mais ces dernières valeurs étant en nombre limité, il sera toujours possible d'éviter cette circonstance, quelles que soient les quantités c et k; car il y a une infinité de manières de faire passer une variable imaginaire d'une valeur à une autre.

De plus, il importe de remarquer que, selon la série de valeurs qu'on adoptera pour z, la fonction u pourra acquérir, pour $z = k$, telle ou telle valeur. La question qui va nous occuper, de déterminer la valeur de u pour une valeur quelconque de z, devra donc être posée comme il suit, si l'on veut qu'elle ait une solution unique :

« La fonction u satisfaisant à l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

» et ayant la valeur b pour $z = c$, assigner la valeur qu'elle acquiert
» pour $z = k$, en supposant connue la série des valeurs infiniment
» rapprochées par lesquelles z passe de la valeur c à la valeur k. »

M. Cauchy a montré combien est importante dans l'analyse, et particulièrement dans le calcul intégral, la considération des diverses manières dont une variable imaginaire peut passer d'une valeur à une autre. Afin de rendre plus sensible la marche d'une pareille variable, nous nous servirons de la représentation géométrique dont cet illustre analyste a tiré un si grand parti. Ayant fait $z = x + y\sqrt{-1}$, nous imaginerons un point Z dont x et y soient les coordonnées rectangulaires, de sorte qu'à chaque valeur de z répondra une position de Z, et réciproquement. Alors, en même temps que z variera de c à k par une série déterminée de valeurs, le point mobile Z passera du point C correspondant à $z = c$, au point K correspondant à $z = k$, en suivant un chemin déterminé. Le problème proposé ci-dessus reviendra donc à trouver la valeur qu'acquiert la fonction u, lorsque Z passe de C en K par un chemin donné [*].

3. Pour éclaircir par un exemple ces considérations générales,

[*] Ce chemin peut être ou une ligne droite, ou une ligne brisée, ou une ligne courbe, ou un assemblage quelconque de lignes droites et courbes. Il n'est assujetti qu'à former entre les points C et K un trait non interrompu.

revenons à l'équation

$$u^2 - z = 0.$$

De l'origine O des coordonnées comme centre, *fig.* 1, *Pl. I*, avec un rayon quelconque r, décrivons une circonférence sur laquelle nous prendrons, dans l'angle des coordonnées positives, les deux points C et K; appelons τ et θ les angles aigus COx, KOx, et supposons $\theta > \tau$; on aura, au point C,

$$z = re^{\tau\sqrt{-1}} = c,$$

et, au point K,

$$z = re^{\theta\sqrt{-1}} = k.$$

Pour une position quelconque du point Z sur le cercle, on aura

$$z = re^{t\sqrt{-1}},$$

et l'on pourra prendre l'angle τ pour valeur initiale de t, et la quantité $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\tau}{2}\sqrt{-1}}$ pour valeur initiale de u. Si, maintenant, on suppose que Z aille de C en K en décrivant l'arc CLK moindre que la demi-circonférence, l'angle t croîtra d'une manière continue de τ à θ, et la fonction u acquerra, pour $z = k$, la valeur $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}$. Mais si l'on fait décrire à Z l'arc CMK plus grand que la demi-circonférence, l'angle t décroîtra de τ à $\theta - 2\pi$, et la fonction u obtiendra, pour $z = k$, la valeur $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta - 2\pi}{2}\sqrt{-1}}$ égale et de signe contraire à la précédente. On voit donc bien que, dans notre manière d'envisager une fonction implicite, elle dépend non-seulement de la valeur de la variable z ou de la position du point Z, mais encore du chemin par lequel ce point y est arrivé à partir de sa position initiale.

4. En général, le premier membre $f(u, z)$ de l'équation proposée sera de la forme

$$Au^m + Bu^{m-1} + Cu^{m-2} + \ldots + Iu + K,$$

A, B,... K, désignant des fonctions entières de z qu'on peut supposer

n'avoir pas de diviseur commun. Nous admettrons aussi que cette équation est irréductible, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune fonction entière de u et de z, d'un degré moindre que m par rapport à u, qui divise $f(u, z)$: s'il y avait un pareil diviseur, l'équation proposée se partagerait en plusieurs autres irréductibles, à l'une desquelles satisferait la fonction dont nous nous occupons. Il suit de là que l'équation

$$f(u, z) = 0$$

ne pourra pas avoir de racines égales, quelle que soit z; car, si cela avait lieu, on sait qu'elle ne serait pas irréductible. Les valeurs de z qui lui feront acquérir des racines égales seront déterminées par une équation en z qui n'aura qu'un nombre limité de solutions : les points correspondants à ces valeurs seront donc en nombre limité et ne formeront pas une ligne continue.

5. Afin de définir d'une manière précise la fonction que nous voulons considérer, choisissons pour point de départ de Z un point C correspondant à la valeur c de z. Supposons que l'équation

$$f(u, c) = 0$$

ait une ou plusieurs racines simples et finies. Appelons b_1 une pareille racine, et u_1 une fonction continue de z qui satisfasse à l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et se réduise à b_1 lorsque le point Z part de la position C.

Concevons maintenant que Z aille du point C qui répond à $z = c$, au point K qui répond à $z = k$, en suivant une ligne CMK, *fig.* 2, telle que, pour aucun point de cette ligne, la fonction u_1 ne devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

Au point K, u_1 acquerra une valeur h_1 qui sera une des racines de l'équation

$$f(u, k) = 0.$$

Je vais prouver, et c'est là une proposition fondamentale dans notre théorie, que cette valeur h_1 restera la même, si, les points C et K res-

tant fixes, la ligne CMK vient à se changer dans la ligne infiniment voisine CM′K.

En effet, regardons ces deux lignes comme parcourues en même temps par deux points mobiles Z et Z′ qui partent ensemble de la position C, qui arrivent ensemble en K, et dont les positions simultanées M et M′ soient toujours infiniment voisines. Appelons v_1 et v'_1 les valeurs simultanées de la fonction u_1 sur les deux lignes CMK, CM′K : puisque v_1 et v'_1 varient d'une manière continue quand les points Z et Z′ se déplacent, il en sera de même de la différence $v_1 - v'_1$.

Observons maintenant que tout le long de la ligne CMK, la racine u_1 de l'équation

$$f(u, z) = 0$$

n'est égale à aucune autre, et qu'ainsi on peut assigner une quantité finie Δ telle, que le module de la différence entre u_1 et une autre racine soit, le long de cette ligne, constamment supérieur à Δ. Pour les deux points M et M′, les valeurs de z diffèrent infiniment peu, et, par conséquent, chacune des racines de l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

pour le point M′, diffère infiniment peu de quelqu'une des racines de la même équation pour le point M. Il en résulte que le module de la différence $v_1 - v'_1$ est ou infiniment petit ou supérieur à Δ : mais cette différence est nulle au point C et varie d'une manière continue; il faut donc qu'elle reste toujours infiniment petite : par conséquent, elle est rigoureusement nulle en K, et la fonction u_1 acquiert en ce point la même valeur h_1, soit que Z y arrive par le chemin CMK ou par le chemin CM′K.

6. Concevons à présent qu'on altère graduellement la ligne CMK, les points C et K restant fixes ; nous obtiendrons la proposition suivante :

Le point Z *allant de* C *en* K, fig. 3, *soit par le chemin* CMK, *soit par le chemin* CNK, *la fonction* u_1 *qui avait en* C *la valeur* b_1 *acquerra dans les deux cas la même valeur* h_1, *si l'on peut, en déformant la ligne* CMK, *la faire coïncider avec* CNK, *sans lui faire franchir*

aucun point pour lequel la fonction u_1 devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

7. On peut faire coïncider le point K avec le point C, et alors on arrive au théorème suivant :

Le point Z étant supposé partir du point C et revenir à ce même point en décrivant la ligne CLMC, fig. 4, la fonction u_1, qui avait au commencement la valeur b_1, reprendra à la fin la même valeur b_1, si l'on peut réduire la ligne fermée CLMC au seul point C sans lui faire franchir aucun point pour lequel la fonction u_1 devienne infinie on égale à une autre racine de l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

On doit observer que cette ligne fermée CLMC peut avoir une forme absolument quelconque, se couper elle-même, ou faire autour du point C un nombre quelconque de révolutions, pourvu que la condition exprimée dans l'énoncé du théorème soit remplie.

Par exemple, la fonction u_1 définie par l'équation

$$u^m = z - a$$

reprendra sa valeur initiale, lorsque le point Z, parti du point C, reviendra à ce même point, si la ligne qu'il a décrite peut se réduire au seul point C, sans franchir le point A qui répond à $z = a$.

Pareillement, la fonction u_1 définie par l'équation

$$(z - \mathrm{a})(z - \mathrm{a}')(z - \mathrm{a}'') \ldots u^m = (z - a)(z - a')(z - a''), \ldots,$$

reprendra sa valeur initiale, lorsque le point Z reviendra à son point de départ C, si la ligne décrite par ce point peut se réduire au seul point C sans franchir les points A, A′, A″,..., *A*, *A*′, *A*″, etc., qui correspondent respectivement aux valeurs a, a', a'',..., a, a′, a″, etc., de z.

Enfin, il en sera de même de la fonction u_1 définie par l'équation

$$u^3 - u + z = 0,$$

si la ligne fermée décrite par Z peut se réduire au seul point C sans

franchir aucun des deux points A et A' qui répondent à $z = + \frac{2}{3\sqrt{3}}$ et à $z = - \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

8. Soit u_1 une fonction algébrique de z définie, comme précédemment, par la condition d'être continue, de satisfaire à l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et de se réduire à la quantité b_1 pour $z = c$. La notation $\int_c^k u_1 dz$ désigne, comme on sait, la somme des produits des valeurs de la fonction u_1 par les accroissements infiniment petits que reçoit la variable z lorsque celle-ci passe de la limite inférieure c à la limite supérieure k. Or, on peut faire varier z de c à k, ou, ce qui est la même chose, faire passer le point Z de C en K d'une infinité de manières, et à chaque chemin CMK, *fig.* 5, suivi par le point Z répondra une valeur finie et déterminée de l'intégrale $\int_c^k u_1 dz$, pourvu qu'en aucun point de ce chemin la fonction u_1 ne devienne ni infinie, ni égale à une autre racine de l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

On peut donc se demander comment varie l'intégrale $\int_c^k u_1 dz$, lorsque les points C et K, ainsi que la ligne CMK, viennent à changer infiniment peu. Cette ligne ne renfermant, par hypothèse, aucun point qui rende la fonction u_1 infinie ou racine multiple, il en sera de même de la ligne infiniment voisine C'M'K', et l'on prouvera, comme au n° 5, que, pour deux points infiniment voisins pris sur ces deux lignes, les valeurs de u_1 diffèrent infiniment peu. L'accroissement de l'intégrale, lorsqu'on passe d'un de ces chemins à l'autre, peut donc être calculé par les règles du calcul des variations, qui donnent

$$\delta \int_c^k u_1 dz = \int_c^k (u_1 dz) = \int_c^k (u_1 d\delta z + \delta u_1 dz).$$

Mais le long de la ligne CMK, la dérivée $\frac{du_1}{dz}$ a constamment une va-

leur finie, comme on le voit par l'équation

$$\frac{df}{du_1}\frac{du_1}{dz}+\frac{df}{dz}=0,$$

où $\frac{df}{du_1}$, ne peut être nul tant que u_1 est une racine simple de l'équation

$$f(u, z)=0.$$

On aura donc

$$\delta u_1=\frac{du_1}{dz}\delta z,$$

d'où

$$\delta u_1\, dz=\frac{du_1}{dz}\delta z\, dz=du_1\,\delta z,$$

et, par suite,

$$\delta\int_c^k u_1\, dz=\int_c^k(u_1\, d\delta z+du_1\,\delta z)=\int_c^k d(u_1\,\delta z),$$

ou bien, en appelant b_1 et h_1 les valeurs de u_1 aux points C et K,

$$\delta\int_c^k u_1\, dz=h_1\,\delta k-b_1\,\delta c.$$

9. On tire de cette équation plusieurs conséquences importantes. Supposons d'abord que les points C' et K' coïncident avec les points C et K; on aura

$$\delta c=0,\quad \delta k=0,$$

et, par suite,

$$\delta\int_c^k u_1\, dz=0.$$

De là résulte le théorème suivant :

L'intégrale $\int_c^k u_1\, dz$, *prise le long de la ligne* CMK, *ne changera pas de valeur, si, les points* C *et* K *restant fixes, cette ligne vient à se déformer, sans franchir toutefois aucun point pour lequel la fonction* u_1 *devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation*

$$f(u, z)=0.$$

10. Supposons ensuite que le point K coïncidant avec le point C,

le chemin CMK devienne une ligne fermée CLMC, *fig.* 4; on aura

$$\delta h = \delta c,$$

d'où

$$\delta \int_c^k u_1\,dz = (h_1 - b_1)\,\delta c.$$

Tant que le point C reste fixe, on a

$$\delta c = 0,$$

et, par suite,

$$\delta \int_c^k u_1\,dz = 0.$$

On conclut de là le théorème suivant :

L'intégrale $\int u_1\,dz$, *prise à partir du point* C, *tout le long de la ligne fermée* CLMC, *garde la même valeur si, le point* C *restant fixe, cette ligne vient à se déformer sans franchir aucun point pour lequel la fonction* u_1 *devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation*

$$f(u, z) = 0.$$

11. On réduit encore à zéro le produit $(h_1 - b_1)\,\delta c$, en faisant $h_1 = b_1$, c'est-à-dire en supposant que la fonction u_1 reprend sa valeur initiale lorsque le point Z, parti du point C, revient à ce même point. On a donc ce théorème :

Si la ligne fermée CLMC *est telle, que la fonction* u_1 *reprenne sa valeur après une révolution du point* Z, *l'intégrale* $\int u_1\,dz$, *prise tout le long de cette ligne, ne changera pas si l'on vient à la déformer sans lui faire franchir aucun point pour lequel la fonction* u_1 *devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation*

$$f(u, z) = 0.$$

En combinant ce théorème avec celui du nº 7, on obtient encore la proposition suivante :

Si la ligne fermée CLMC *est telle, qu'on puisse la réduire au seul point* C *sans lui faire franchir aucun point pour lequel la fonction* u_1 *devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation*

$$f(u, z) = 0,$$

l'intégrale $\int u_1\,dz$, *prise tout le long de cette ligne, sera égale à zéro.*

12. Lorsque la fonction u_1 reprend sa valeur initiale après une révolution de Z sur la ligne fermée CLMC, l'intégrale $\int u_1\, dz$ prise tout le long de cette ligne est indépendante du point C qu'on y prend pour origine de l'intégrale. En effet, la ligne CLMC restant la même, si le point C vient à se déplacer sur cette ligne, δc ne sera pas zéro; mais, comme on a, par hypothèse,

$$h_1 = b_1,$$

la variation de l'intégrale $\int u_1\, dz$ sera nulle.

Il n'en est plus de même évidemment, lorsque la fonction ne reprend pas sa valeur initiale après une révolution de Z sur la ligne fermée; car alors la différence $h_1 - b_1$ cesse d'être nulle.

13. Je crois devoir répéter l'observation déjà faite au n° **7**, que la ligne fermée dont il vient d'être question n'est pas nécessairement le contour extérieur d'une aire limitée, comme serait une circonférence ou une ellipse, mais qu'elle peut se couper elle-même comme une lemniscate, et cela un nombre quelconque de fois. Il peut se faire encore qu'une même partie de cette ligne soit parcourue deux ou plusieurs fois dans une révolution accomplie par le point Z. Par exemple, on pourrait la composer des deux circonférences CLAM, BNP, *fig.* 6, et de la droite AB, une révolution du point Z consistant à décrire successivement l'arc CLA, la droite AB, la circonférence BNP, la droite BA, et enfin l'arc AMC. L'habitude où l'on est d'entendre par *ligne fermée* un contour qui ne se coupe pas lui-même me fait insister sur ces remarques, afin qu'on ne restreigne pas inutilement l'étendue des théorèmes précédents [*].

---

[*] Les théorèmes des nos **9**, **10**, **11** ont été donnés par M. Cauchy dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* année 1846. Seulement l'illustre géomètre caractérise les points que le chemin parcouru ne doit pas franchir en disant que, pour ces points, la fonction devient discontinue : comme je me borne ici aux fonctions algébriques, j'ai cru donner plus de précision aux énoncés et aux démonstrations en disant que les points dont il s'agit sont ceux pour lesquels la fonction u devient infinie ou racine multiple de l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

14. Sans rien changer aux démonstrations, on peut, dans les propositions qui viennent d'être établies, substituer à u_1 une fonction rationnelle de u_1 et de z, pourvu qu'elle ne devienne pas infinie le long du chemin suivi par le point Z. De là nous pouvons conclure le développement de u_1 en série.

Soient a, a', a'', etc., les valeurs de z pour lesquelles l'équation

$$f(u, z) = 0$$

a des racines égales ou infinies : nommons A, A', A'', etc., les points correspondants; joignons le point de départ C de Z aux points A, A', A'', etc., par des droites, et appelons ρ une quantité positive moindre que la plus petite des longueurs CA, CA', CA'', etc. Du centre C, avec un rayon égal à ρ, décrivons un cercle σ qui ne renfermera aucun des points A, A', A'', etc.

Considérons un point intérieur à ce cercle ou situé sur la circonférence : la fonction u_1 peut acquérir en ce point diverses valeurs, suivant que le point Z, parti de C, y arrive par tel ou tel chemin; mais si l'on assujettit ce chemin à ne pas sortir du cercle σ, la fonction u_1 ne pourra plus prendre au point dont il s'agit qu'une seule valeur parfaitement déterminée; car tous les chemins assujettis à cette condition se réduisent les uns aux autres sans franchir aucun des points A, A', A'', etc. Nous nommerons $\varphi(z)$ cette valeur de la fonction u_1, et c'est elle que nous allons développer en série, en suivant la méthode expliquée par M. Cauchy dans divers Mémoires.

Pour cela, nous prendrons dans l'intérieur du cercle σ un point quelconque Γ; soit γ la valeur correspondante de z L'expression

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}{z - \gamma}$$

sera une fonction rationnelle de z et de $\varphi(z)$ qui ne deviendra pas infinie, tant que le point Z ne sortira pas du cercle σ; car, pour $z = \gamma$, elle se réduit à la quantité finie $\varphi'(\gamma)$. Comme d'ailleurs cette fonction reprend la même valeur après une révolution de Z sur la circonférence du cercle σ, l'intégrale

$$\int \frac{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}{z - \gamma} dz,$$

prise tout le long de cette ligne, sera, d'après le n° **11**, égale à zéro.

On aura donc l'équation

$$\int \frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{z-\gamma}\,dz = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi(\gamma)\int \frac{dz}{z-\gamma} = \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-\gamma},$$

les intégrales étant toujours prises le long de la circonférence σ.

Mais l'intégrale $\int \frac{dz}{z-\gamma}$ peut être réduite, en vertu du n° **11**, à la même intégrale $\int \frac{dz}{z-\gamma}$, prise le long d'une autre circonférence décrite du centre Γ avec un très-petit rayon ε. Sur cette dernière, on peut faire

$$z-\gamma = \varepsilon e^{\theta\sqrt{-1}},$$

θ variant seul, de sorte qu'on ait

$$dz = \varepsilon e^{\theta\sqrt{-1}}\,d\theta\,\sqrt{-1},$$

et, par suite,

$$\int \frac{dz}{z-\gamma} = \sqrt{-1}\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\sqrt{-1}.$$

L'équation précédente devient donc

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-\gamma}.$$

Observons maintenant que sur la circonférence σ le module ρ de $z-c$ est supérieur à la distance $C\Gamma$, ou, ce qui est la même chose, au module de $\gamma - c$: l'expression

$$\frac{1}{z-\gamma} = \frac{1}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\gamma-c}{z-c}}$$

peut donc être développée en série convergente suivant les puissances croissantes de $\frac{\gamma-c}{z-c}$, et l'on a

$$\frac{1}{z-\gamma} = \frac{1}{z-c} + \frac{\gamma-c}{(z-c)^2} + \frac{(\gamma-c)^2}{(z-c)^3} + \ldots.$$

On en conclut

$$\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-\gamma} = \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-c} + (\gamma-c)\int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-c)^2} + (\gamma-c)^2\int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-c)^3} + \ldots,$$

où le second membre est une série convergente. On a donc enfin l'équation

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left[\begin{array}{l}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-c} + (\gamma - c)\int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-c)^2} \\ + (\gamma - c)^2 \int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-c)^3} + \ldots\end{array}\right],$$

qui donne le développement de $\varphi(\gamma)$ en série convergente suivant les puissances croissantes de $\gamma - c$.

15. L'existence de ce développement une fois démontrée, on pourra en calculer les coefficients par le théorème de Taylor, qui donnera

$$\varphi(\gamma) = \varphi(c) + \frac{\varphi'(c)}{1}(\gamma - c) + \frac{\varphi''(c)}{1.2}(\gamma - c)^2 + \ldots$$

On a dans cette équation

$$\varphi(c) = b_1;$$

si, de plus, on appelle $F_1(u, z)$, $F_2(u, z)$, etc., les valeurs de $1 . \frac{du}{dz}$, $1 . 2 . \frac{d^2u}{dz^2}$, etc., tirées des équations

$$\frac{df}{du}\frac{du}{dz} + \frac{df}{dz} = 0, \quad \frac{df}{du}\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2f}{du^2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + 2\frac{d^2f}{du\,dz}\frac{du}{dz} + \frac{d^2f}{dz^2} = 0, \ldots,$$

les quantités $\frac{\varphi'(c)}{1}$, $\frac{\varphi''(c)}{1 2}$, etc., auront pour valeurs $F_1(b_1, c)$, $F_2(b_1, c)$, etc., et il en résultera

$$\text{(F)} \quad \varphi(\gamma) = b_1 + F_1(b_1, c).(\gamma - c) + F_2(b_1; c).(\gamma - c)^2 + \ldots$$

On voit clairement par ce qui précède quelle est celle des racines de l'équation

$$f(u, z) = 0$$

dont la formule (F) donne le développement : la série qui en est le second membre fournit la valeur pour $z = \gamma$ de celle des racines qui, se réduisant à b_1 pour $z = c$, varie d'une manière continue avec z, en supposant que le point Z aille de C en Γ sans sortir du cercle σ, c'est-à-dire en supposant que la distance CZ reste toujours moindre que la plus petite des distances CA, CA′, CA″, etc. La formule ne peut

s'appliquer qu'aux valeurs de γ telles, que le module de $\gamma - c$ soit inférieur à cette plus petite distance; la notation $\varphi(\gamma)$ n'a même un sens déterminé qu'à cette condition, nº **14**.

16. Soit maintenant k une valeur quelconque de z et K le point correspondant : supposons que le point mobile Z arrive en K par un chemin CMK, *fig.* 7, qui ne passe par aucun des points A, A′, A″, etc.; on pourra calculer comme il suit la valeur h_1 de la fonction u_1 pour $z = k$.

Du centre C on décrira un cercle qui laisse en dehors de lui les points A, A′, A″, etc. Si ce cercle renferme tout le chemin CMK, on obtiendra h_1 en remplaçant γ par k dans la formule (F). Si le contraire arrive, la circonférence coupera la ligne CMK en un ou plusieurs points : soient C′ celui de ces points où Z arrive en premier lieu et c' la valeur correspondante de z; on obtiendra la valeur b'_1 de u_1 au point C′ en remplaçant dans la formule (F) γ par c'. Le chemin CMK se trouve partagé par ce point en deux parties, l'une CMC′ et l'autre C′M′K : du centre C′ on décrira un second cercle qui laisse en dehors tous les points A, A′, A″, etc. Si ce cercle renferme tout le chemin C′M′K, on obtiendra h_1 en remplaçant dans la formule (F) c par c', b_1 par b'_1 et γ par k : si le contraire arrive, la circonférence coupera le chemin C′M′K ; soient C″ celui des points de rencontre où Z arrive en premier lieu et c'' la valeur correspondante de z. On obtiendra la valeur b''_1 de u_1 au point C″ en remplaçant dans la formule (F) c par c', b_1 par b'_1 et γ par c''. Le chemin C′M′K est maintenant partagé par ce point en deux parties C′M′C″ et C″M″K : du centre C″ on décrira encore un troisième cercle qui laisse en dehors tous les points A, A′, A″, etc. En répétant cette construction un nombre limité de fois, on arrivera à un cercle décrit du centre $C^{(n)}$ et qui renfermera complétement le chemin $C^{(n)}M^{(n)}K$; alors on obtiendra h_1 en remplaçant dans la formule (F) c par $c^{(n)}$, b_1 par $b_1^{(n)}$ et γ par k.

Les points C et K restant fixes, si l'on déforme la ligne CMK sans lui faire franchir aucun des points A, A′, A″, etc., la quantité h_1 reste la même. On pourra profiter de cette circonstance et aussi de l'indétermination des rayons des cercles pour faciliter le calcul de h_1 ; mais nous omettrons ces détails pour abréger.

17. Au lieu du développement donné par la formule (F), lequel est applicable tant que le point Z ne sort pas d'un certain cercle, on peut en former une infinité d'autres dont chacun sera exact dans toute l'étendue d'une courbe fermée différente du cercle.

Appelons $\psi(z)$ une fonction rationnelle de z qui s'annule pour $z = c$: si l'on fait, comme précédemment, $z = x + y\sqrt{-1}$, le module de $\psi(z)$, que nous représenterons par $m\psi(z)$, sera une fonction de x et de y, et l'équation

$$m\psi(z) = l,$$

où l désigne une constante positive, appartiendra à une courbe algébrique. Comme au point C, on a

$$m\psi(z) = o,$$

il est aisé de voir que, pour des valeurs suffisamment petites de l, une des branches de cette courbe devra se réduire à un contour fermé s dans l'intérieur duquel se trouve le point C [*].

Supposons maintenant que l croissant depuis zéro jusqu'à une certaine valeur λ, le contour s, qui, pour $l = o$, se réduisait au point C, aille toujours en s'élargissant et coïncide, pour $l = \lambda$, avec la courbe fermée σ. Admettons aussi que sur la courbe σ ou dans son intérieur on ne puisse avoir

$$\psi(z) = \psi(z')$$

sans qu'on ait en même temps

$$z = z',$$

que la dérivée de $\psi(z)$ ne s'annule pas dans ces mêmes limites, et, enfin, que tous les points A, A′, A″, etc., soient en dehors de cette courbe. Toutes ces conditions seront remplies si l'on prend λ assez petit.

Cela posé, si l'on assujettit Z à ne pas sortir du contour σ, la fonction u_1 ne pourra acquérir en chaque point qu'une seule valeur, quel que soit le chemin par lequel on y arrive. Nous appellerons $\varphi(z)$ cette valeur unique, et nous allons montrer qu'on peut la développer en une série convergente ordonnée suivant les puissances de $\psi(z)$.

[*] Dans les *Comptes rendus de l'Académie*, tome IV, page 777, M. Cauchy examine comment les diverses branches de cette courbe se transforment et se réunissent, lorsque le module l croît de zéro à l'infini.

Prenons dans l'intérieur du contour σ un point quelconque Γ, et nommons γ la valeur correspondante de z. L'expression

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{\psi(z)-\psi(\gamma)}$$

sera une fonction rationnelle de z et de $\varphi(z)$ qui ne deviendra pas infinie tant que le point Z ne sortira pas de ce contour; car, pour $z=\gamma$, elle se réduit à la quantité finie $\frac{\varphi'(\gamma)}{\psi'(\gamma)}$. Comme, d'ailleurs, cette fonction reprend la même valeur après une révolution de Z sur la courbe σ, l'intégrale

$$\int\frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{\psi(z)-\psi(\gamma)}\,dz,$$

prise le long de cette ligne, sera égale à zéro. On aura donc

$$\varphi(\gamma)\int\frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}=\int\frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)};$$

d'où

$$\varphi(\gamma)=\frac{\displaystyle\int\frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}}{\displaystyle\int\frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}},$$

les intégrales étant toujours prises le long du contour σ.

L'intégrale

$$\int\frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}$$

s'évalue aisément : on a, en effet,

$$\frac{1}{\psi(z)-\psi(\gamma)}=\frac{1}{\psi'(\gamma)}\cdot\frac{1}{z-\gamma}+\varpi(z),$$

$\varpi(z)$ désignant une fonction rationnelle de z qui reste finie dans tout l'intérieur de σ ou même sur cette courbe; il en résulte

$$\int\frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}=\frac{1}{\psi'(\gamma)}\int\frac{dz}{z-\gamma}+\int\varpi(z)\,dz.$$

En vertu du n° **11**, on a

$$\int\varpi(z)\,dz=0;$$

quant à l'intégrale $\int \frac{dz}{z-\gamma}$, on n'en change pas la valeur en la supposant prise le long d'une circonférence décrite du centre Γ avec un rayon très-petit ε, ce qui permet d'y faire

$$z - \gamma = \varepsilon e^{\theta\sqrt{-1}},$$

θ variant seul : on a donc

$$\int \frac{dz}{z-\gamma} = \sqrt{-1}\int_0^{2\pi} d\theta_{,} = 2\pi\sqrt{-1},$$

et, par suite,

$$\int \frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)} = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\psi'(\gamma)}.$$

Observons à présent que sur la courbe σ le module de $\psi(z)$ est égal à λ, et, par conséquent, supérieur à celui de $\psi(\gamma)$; l'expression

$$\frac{1}{\psi(z)-\psi(\gamma)} = \frac{1}{\psi(z)} \cdot \frac{1}{1-\frac{\psi(\gamma)}{\psi(z)}}$$

peut donc être développée en une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{\psi(\gamma)}{\psi(z)}$, et l'on a

$$\frac{1}{\psi(z)-\psi(\gamma)} = \frac{1}{\psi(z)} + \frac{\psi(\gamma)}{\psi^2(z)} + \frac{\psi^2(\gamma)}{\psi^3(z)} + \ldots.$$

On en conclut

$$\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)} = \int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)} + \psi(\gamma)\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi^2(z)} + \psi^2(\gamma)\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi^3(z)} + \ldots,$$

et, par suite,

$$\varphi(\gamma) = \frac{\psi'(\gamma)}{2\pi\sqrt{-1}}\left[\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)} + \psi(\gamma)\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi^2(z)} + \psi^2(\gamma)\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi^3(z)} + \ldots\right],$$

où les intégrales peuvent être maintenant prises le long d'un contour fermé quelconque renfermé dans la courbe σ et enveloppant une fois le point C.

En réduisant ce contour à une circonférence d'un rayon très-petit ayant le point C pour centre, on prouve facilement que l'intégrale

$\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi^n(z)}$ est égale à $2\pi r_n \sqrt{-1}$, r_n désignant ce que M. Cauchy appelle le résidu de la fonction $\frac{\varphi(z)}{\psi^n(z)}$ relatif à $z = c$. L'équation précédente peut donc s'écrire

$$\varphi(\gamma) = \psi'(\gamma)\,[r_1 + r_2\psi(\gamma) + r_3\psi^2(\gamma) + \ldots].$$

Cette formule, qui s'étend à tous les points du contour σ et de son intérieur, donne l'expression de $\varphi(\gamma)$ en une série ordonnée suivant les puissances de $\psi(\gamma)$.

En y faisant

$$\psi(z) = z - c,$$

on retrouve la formule (F); pour en donner une autre application, prenons

$$\psi(z) = (z-c)(z-c'),$$

c' désignant la valeur de z qui répond au point C' : l'équation

$$m(z-c)(z-c') = l$$

représente le lieu des points tels, que le produit de leurs distances aux points C et C' soit égal à l. Pour des valeurs de l moindres que $\frac{1}{4}\Delta^2$, Δ étant la distance CC', le lieu se compose de deux courbes fermées : une de ces courbes enveloppe le point C, elle va en s'élargissant à mesure que l augmente; et pour $l = \frac{1}{4}\Delta^2$, elle devient la moitié POQ, *fig.* 8, d'une lemniscate ayant pour foyers les points C et C'. Si tous les points A, A', A'', etc., sont sur cette demi-lemniscate ou en dehors, on pourra prendre pour le contour σ la courbe fermée infiniment voisine qui répond à $l = \frac{1}{4}\Delta^2 - \varepsilon$, ε désignant un infiniment petit positif; car il est aisé de voir que toutes les conditions énoncées ci-dessus seront remplies. En effet, la dérivée $2z - c - c'$ de $\psi(z)$ ne s'annule que pour la valeur $z = \frac{c+c'}{2}$, qui répond au point O extérieur au contour σ : de plus, l'équation

$$\psi(z) = \psi(z')$$

donne ici pour z' les deux valeurs $z' = z$, $z' = c + c' - z$, et si le point qui répond à la première valeur est situé en dedans du contour σ, celui qui répond à la seconde sera en dehors, puisque ces deux points sont placés symétriquement par rapport au point O.

On aura donc l'équation

$$\varphi(\gamma) = (2\gamma - c - c')\left[\begin{array}{c} r_1 + r_2(\gamma - c)(\gamma - c') \\ + r_3(\gamma - c)^2(\gamma - c')^2 + \ldots \end{array}\right],$$

r_n désignant le résidu relatif à $z = c$ de $\frac{\varphi(z)}{(z-c)^n(z-c')^n}$, et cette formule sera applicable tant que le point Γ correspondant à $z = \gamma$ sera dans l'intérieur de la demi-lemniscate POQ.

Ajoutons qu'en suivant la marche tracée au nº **16**, on pourra se servir de ces nouveaux développements pour le calcul de la fonction u_1 à l'extrémité d'un chemin donné.

DEUXIÈME PARTIE.

18. Nous avons établi que la valeur de la fonction u_1 au point K reste la même, quand le chemin CMK suivi par le point Z vient à se déformer sans franchir aucun point pour lequel cette fonction devienne infinie ou racine multiple de l'équation

$$f(u, z) = 0\,;$$

nous avons ensuite donné le moyen de calculer cette valeur de u_1, lorsque le chemin CMK est connu. Mais si ce chemin, en se déformant, franchit un ou plusieurs des points dont nous venons de parler, la valeur de u_1 pour le point K changera généralement : il nous faut examiner comment ces diverses valeurs de u_1 se changent les unes dans les autres.

Pour plus de clarté, nous supposerons d'abord que le coefficient de la plus haute puissance de u dans le polynôme $f(u, z)$ soit indépendant de z; alors les valeurs de u tirées de l'équation

$$f(u, z) = 0$$

ne peuvent devenir infinies pour des valeurs finies de z.

Soit maintenant A un point pour lequel p racines de l'équation

$$f(u, z) = 0$$

deviennent égales : nommons b la valeur commune de ces racines et a la valeur de z au point A. Décrivons autour de ce point un contour fermé de dimensions infiniment petites CLMC, *fig.* 9 [*]; prenons-y un point C pour position initiale du point mobile Z; appelons u_1, $u_2, \ldots, u_p$ les p fonctions de z qui satisfont à l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et qui se réduisent pour la position initiale C de z aux p racines très-peu différentes de b de l'équation

$$f(u, c) = 0.$$

On sait qu'après une révolution de Z sur le contour CLMC les fonctions de z, qui satisfont à l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et dont les valeurs au point de départ diffèrent infiniment peu des racines simples de l'équation

$$f(u, a) = 0,$$

reprennent leurs valeurs initiales : voyons ce qui arrive aux fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Observons que, pour $u = b$, les polynômes

$$f(u, a), \quad \frac{df(u, a)}{du}, \quad \frac{d^2 f(u, a)}{du^2}, \ldots, \frac{d^{p-1} f(u, a)}{du^{p-1}},$$

doivent s'annuler, mais que la dérivée suivante $\frac{d^p f(u, a)}{du^p}$ doit prendre une valeur A différente de zéro. Si donc dans l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

[*] Nous supposerons dans ce qui va suivre que la ligne infiniment petite CLMC ne fait qu'une seule circonvolution autour du point A, c'est-à-dire que l'angle polaire formé par le rayon vecteur AZ avec une direction fixe varie seulement de 2π, pendant une révolution de Z sur le contour CLMC.

on pose

$$u = b + \beta, \quad z = a + \alpha,$$

elle prendra la forme

$$(1) \qquad A\beta^p + \sum B\beta^q \alpha^r = 0,$$

le signe $\sum$ désignant une somme de termes dans lesquels les exposants q et r sont entiers et positifs; dans les termes où r est nul, q est plus grand que p, et il y a nécessairement un terme au moins où, q étant nul, r ne l'est pas; autrement l'équation (1) serait divisible par β, ou, ce qui est la même chose, l'équation

$$f(u, z) = 0$$

serait divisible par $u - b$, et, par conséquent, ne serait pas irréductible.

Le point Z étant supposé infiniment voisin de A, le module de la différence $z - a = \alpha$ sera infiniment petit, et, parmi les valeurs correspondantes de u, tirées de l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

il y en aura p telles, que le module de la différence $u - b = \beta$ soit infiniment petit. Si l'on veut les déterminer, il faudra chercher les p valeurs infiniment petites de β qui satisfont à l'équation (1), et, pour les obtenir approximativement, il suffira de conserver, dans cette équation, les termes de l'ordre le moins élevé.

Commençons par le cas le plus ordinaire, celui où la dérivée $\frac{df(u, z)}{dz}$ ne s'annule pas pour $z = a$, $u = b$; alors il y a, dans l'équation (1), un terme de la forme $B\alpha$, et il est clair que les deux termes $A\beta^p$ et $B\alpha$ sont d'un ordre moins élevé que tous les autres. Les p valeurs cherchées de β sont donc données approximativement par l'équation

$$A\beta^p + B\alpha = 0, \quad \text{ou} \quad \beta^p = h\alpha,$$

en faisant $-\frac{B}{A} = h$. Or, si l'on pose $\alpha = \rho e^{\tau\sqrt{-1}}$, ρ désignant la distance AZ et τ l'angle qu'elle fait avec la direction des x positives; si,

de plus, on représente par $(h\rho)^{\frac{1}{p}}$ une des valeurs de $\sqrt[p]{h\rho}$, les p valeurs de β, qui satisfont à l'équation

$$\beta^p = h\alpha,$$

seront

$$\beta_1 = (h\rho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau}{p}\sqrt{-1}}, \qquad \beta_2 = (h\rho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau+2\pi}{p}\sqrt{-1}},$$

$$\beta_3 = (h\rho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau+4\pi}{p}\sqrt{-1}}, \ldots, \beta_p = (h\rho)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau+2(p-1)\pi}{p}\sqrt{-1}}.$$

Lorsque le point Z, après avoir fait une révolution sur le contour CLMC, est revenu à sa position initiale C, le rayon vecteur ρ est redevenu le même sans avoir passé par zéro; le facteur $(h\rho)^{\frac{1}{p}}$ a donc repris sa valeur initiale. Mais l'angle τ a augmenté de 2π, et, par conséquent, β_1 a acquis la valeur initiale de β_2, β_2 a acquis celle de β_3, et ainsi de suite, jusqu'à β_p qui a pris celle de β_1.

Ces conclusions sont rigoureuses, bien que les valeurs précédentes de β_1, β_2,..., β_p ne soient qu'approchées. En effet, nommons maintenant β_1, β_2,..., β_p les valeurs exactes de ces fonctions; l'erreur commise sur chacune d'elles dans les formules précédentes est un infiniment petit d'un ordre supérieur à $\frac{1}{p}$, en regardant ρ comme du premier ordre. Mais le système des valeurs de β fournies par l'équation (1) doit se retrouver le même quand le point Z est revenu à son point de départ. Si donc la valeur finale de β_1, après une révolution de Z, n'était pas exactement égale à la valeur initiale de β_2, il faudrait qu'elle fût égale à la valeur initiale de quelque racine de l'équation (1) autre que β_2; or cela est impossible, puisqu'elle différerait de cette valeur initiale ou d'une quantité finie, ou d'un infiniment petit de l'ordre $\frac{1}{p}$, qui ne peut être nul tant que ρ ne l'est pas. On voit de même que la valeur finale de β_2 est rigoureusement égale à la valeur initiale de β_3, et ainsi de suite. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Si la dérivée $\frac{df(u, z)}{dz}$ ne se réduit pas à zéro pour $z = a$, $u = b$, les fonctions u_1, u_2,..., u_p, qui deviennent égales à b au point A, *peuvent*

être rangées sur un cercle de façon qu'après une révolution de Z sur un contour infiniment petit tracé autour du point A, la valeur finale de chacune d'elles soit égale à la valeur initiale de la suivante.

C'est ce que nous énoncerons d'une manière abrégée en disant que ces fonctions forment autour du point A un *système circulaire* composé de p termes.

On a admis dans la démonstration que le point Z parcourait le contour CLMC dans le sens où l'angle polaire τ augmente et que nous appellerons le *sens direct :* s'il le parcourait en sens contraire, les valeurs finales de $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_p$ seraient respectivement les valeurs initiales de $u_p, u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$.

Si le point Z faisait dans le sens direct deux révolutions au lieu d'une, les valeurs finales des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$ seraient respectivement égales aux valeurs initiales de $u_3, u_4, \ldots, u_2$: après trois révolutions, elles seraient égales aux valeurs initiales de $u_4, u_5, \ldots, u_3$, et ainsi de suite. Ce n'est qu'après p révolutions du point Z que ces fonctions auront repris leurs valeurs initiales.

19. Lorsque la dérivée $\frac{df(u, z)}{dz}$ s'annule pour $z = a$, $u = b$, les propositions précédentes ne sont plus toujours exactes : pour savoir ce que les racines deviennent dans ce cas après une révolution du point Z, revenons à l'équation (1) et cherchons à y mettre en évidence les termes de l'ordre le moins élevé. Soit T un terme quelconque; il y aura deux cas à distinguer : ou bien il n'existera dans l'équation (1) aucun autre terme dans lequel les exposants de α et de β soient à la fois moindres que dans T (l'un des deux pouvant être égal), ou bien il existera de pareils termes. Appelons Λ la somme des termes T qui sont dans le premier cas et Λ' la somme des autres, de sorte qu'on ait

$$f(b+\beta, a+\alpha) = A\beta^p + \sum B\beta^q\alpha^r = \Lambda + \Lambda';$$

les termes de l'ordre le moins élevé se trouveront certainement dans le groupe Λ. D'ailleurs, si l'on range les termes de Λ dans un ordre tel, que les exposants de β aillent en diminuant, les exposants de α devront aller en augmentant, sans quoi les exposants de α et de β dans un de ces termes seraient respectivement moindres que dans un

autre, et alors ce dernier ferait partie du groupe Λ'. Si donc on désigne par p, p_1, $p_2, \ldots, p_{i-1}$ des nombres entiers décroissants, et par $q_1, q_2, \ldots, q_i$ des nombres entiers croissants, Λ sera de la forme

$$\Lambda = A\beta^p + A_1\beta^{p_1}\alpha^{q_1} + A_2\beta^{p_2}\alpha^{q_2} + \ldots + A_i\alpha^{q_i}.$$

Voici maintenant la question qui se présente : Dans le polynôme Λ, choisir de toutes les manières possibles un groupe de deux ou de plusieurs termes tels, qu'en y regardant α comme un infiniment petit du premier ordre et β comme un infiniment petit d'un ordre convenable, ces termes soient d'un même ordre inférieur à celui de tous les autres termes du polynôme.

Quand on aura trouvé tous ces groupes, on formera, en les égalant à zéro, des équations dont chacune déterminera approximativement une ou plusieurs des p valeurs infiniment petites de β.

Supposons donc qu'en regardant β comme de l'ordre μ, les deux termes

$$A^{(f)}\beta^{p_f}\alpha^{q_f}, \quad A^{(g)}\beta^{p_g}\alpha^{q_g},$$

soient d'un même ordre, et que tous les autres termes de Λ soient d'un ordre au moins égal ; on aura

$$\mu p_f + q_f = \mu p_g + q_g,$$

et, pour toutes les valeurs de h autres que f et g,

$$\mu p_h + q_h > \mu p_f + q_f,$$

le signe $>$ n'excluant pas l'égalité. (Pour que ces notations s'appliquent aux termes extrêmes de Λ, on supposera $p_0 = p$, $q_0 = 0$, $p_i = 0$.)

On rend l'interprétation de ces conditions plus facile en leur donnant une signification géométrique. Regardons les nombres entiers p_k et q_k comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point que nous appellerons M_k ; alors le point M_0, *fig.* 10, sera sur l'axe des x, le point M_i sur l'axe des y, et tous les autres points M_k dans l'angle des coordonnées positives. De plus, la droite qui joint deux quelconques de ces points M_k, M_l rencontrera les axes des x et des y du côté des coordonnées positives ; cela résulte de ce que si l'abscisse p_k est plus

grande que l'abscisse p_l, l'ordonnée q_k sera moindre, au contraire, que l'ordonnée q_l.

D'un autre côté, si l'on construit la droite OL dont le coefficient angulaire est $\frac{1}{\mu}$, la quantité $\frac{\mu p_k + q_k}{\sqrt{1+\mu^2}}$ exprimera la projection de OM_k sur OL, et puisqu'on doit avoir

$$\mu p_f + q_f = \mu p_g + q_g,$$

on voit que les projections de OM_f et de OM_g sur OL doivent être égales, ou, en d'autres termes, que OL doit être perpendiculaire sur la droite $M_f M_g$. De plus, on doit avoir

$$\mu p_h + q_h > \mu p_f + q_f;$$

par conséquent, la projection de OM_h sur OL doit être supérieure ou au moins égale à celle de OM_f. En d'autres termes, le point M_h doit être par rapport à l'origine au delà de la droite $M_f N_g$, ou du moins sur cette droite.

Ainsi, pour obtenir dans le polynôme Λ les groupes de termes définis ci-dessus, ou, ce qui revient au même, pour connaître ceux des points M_0, M_1, M_2, etc., auxquels correspondent les termes de ces groupes, on cherchera de toutes les manières possibles deux points M_f, M_g tels, qu'il n'y en ait aucun autre situé, par rapport à la droite $M_f M_g$ qui les joint, du même côté que l'origine. Sur cette droite pourront se trouver encore d'autres points M_k, M_l, etc. : alors un des groupes demandés sera

$$G = A^{(f)} \beta^{p_f} \alpha^{q_f} + A^{(g)} \beta^{p_g} \alpha^{q_g} + A^{(k)} \beta^{p_k} \alpha^{q_k} + A^{(l)} \beta^{p_l} \alpha^{q_l} + \ldots;$$

si l'on détermine le nombre μ par l'équation

$$\mu p_f + q_f = \mu p_g + q_g,$$

qui donne

$$\mu = \frac{q_g - q_f}{p_f - p_g},$$

et qu'on regarde β comme étant de l'ordre μ, tous les termes de ce groupe seront d'un même ordre $\mu p_f + q_f$ inférieur à l'ordre de tous les autres termes de Λ, et, par conséquent, de tous les autres termes de l'équation (1).

Pour former les groupes G sans en laisser échapper aucun, on pourra procéder comme il suit. Par le point M_0, *fig.* 11, on imaginera une droite coïncidant d'abord avec l'axe des x, et on la fera tourner autour de M_0 dans un sens tel, qu'elle rencontre la partie positive de l'axe des y. On arrêtera ce mouvement de rotation dès que la droite mobile passera par quelqu'un des points M_1, M_2, etc. : à ce moment elle en pourra contenir plusieurs, et, si nous les nommons M_ε, $M_\zeta, \ldots, M_\eta$, les indices $\varepsilon, \zeta, \ldots, \eta$ étant rangés par ordre de grandeur, les termes de Λ correspondants aux points M_0, M_ε, $M_\zeta, \ldots, M_\eta$ formeront un premier groupe. Faisons maintenant tourner la droite mobile, toujours dans le même sens, mais autour du point M_η, jusqu'à ce qu'elle atteigne quelqu'un des points $M_{\eta+1}$, $M_{\eta+2}$, etc., et soient M_η, $M_\theta, \ldots, M_\iota$ les points qu'elle renferme dans cette nouvelle position : les termes de Λ correspondants aux points M_η, $M_\theta, \ldots, M_\iota$ composeront un deuxième groupe. Faisons encore tourner la droite mobile autour de M_ι, jusqu'à ce qu'elle atteigne de nouveaux points $M_\varkappa, \ldots, M_\lambda$; nous obtiendrons un troisième groupe formé des termes correspondants aux points M_ι, $M_\varkappa, \ldots, M_\lambda$, et ainsi de suite. On continuera jusqu'à ce que la droite mobile passe par le dernier point M_i : les divers groupes ainsi formés seront :

$$G_1 = A\beta^{p} + A^{(\varepsilon)}\beta^{p_\varepsilon}\alpha^{q_\varepsilon} + \ldots + A^{(\eta)}\beta^{p_\eta}\alpha^{q_\eta},$$

$$G_2 = A^{(\eta)}\beta^{p_\eta}\alpha^{q_\eta} + A^{(\theta)}\beta^{p_\theta}\alpha^{q_\theta} + \ldots + A^{(\iota)}\beta^{p_\iota}\alpha^{q_\iota},$$

$$G_3 = A^{(\iota)}\beta^{p_\iota}\alpha^{q_\iota} + A^{(\varkappa)}\beta^{p_\varkappa}\alpha^{q_\varkappa} + \ldots + A^{(\lambda)}\beta^{p_\lambda}\alpha^{q_\lambda},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$G_\omega = A^{(\varpi)}\beta^{p_\varpi}\alpha^{q_\varpi} + \ldots + A^{(i)}\alpha^{q_i},$$

où l'on peut remarquer que le premier terme du premier groupe G_1 est indépendant de α; que le dernier terme du dernier groupe G_ω est indépendant de β; et, enfin, que le dernier terme de chaque groupe est en même temps le premier terme du groupe suivant [*].

---

[*] La règle qu'on vient de donner pour le mouvement de la droite mobile subsisterait encore, si, outre les points M correspondants aux termes de Λ, on avait encore

Si maintenant on égale successivement ces divers groupes à zéro, on aura les équations qui fournissent, approximativement, les valeurs infiniment petites de β. L'équation

$$G_1 = 0,$$

divisée par β^{p_η}, nous donnera $p - p_\eta$, valeurs de β, qui seront de l'ordre $\frac{q_\eta}{p - p_\eta}$; de même l'équation

$$G_2 = 0,$$

divisée par $\beta^{p_\iota} \alpha^{q_\eta}$, fournira $p_\eta - p_\iota$, valeurs qui seront de l'ordre $\frac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota}$; puis l'équation

$$G_3 = 0,$$

divisée par $\beta^{p_\lambda} \alpha^{q_\iota}$, en donnera $p_\iota - p_\lambda$, de l'ordre $\frac{q_\lambda - q_\iota}{p_\iota - p_\lambda}$, et ainsi de suite. Enfin, de l'équation

$$G_\omega = 0,$$

divisée par α^{q_ϖ}, on tirera p_ϖ, valeurs de β, de l'ordre $\frac{q_i - q_\varpi}{p_\varpi}$. Le nombre total de ces valeurs infiniment petites de β est

$$p - p_\eta + p_\eta - p_\iota + p_\iota - p_\lambda + \ldots + p_\varpi,$$

ou simplement p, comme cela devait être.

Il suit de la construction expliquée ci-dessus, que le polygone $M_0 M_\eta M_\iota \ldots M_\varpi M_i$ est convexe et tourne sa convexité vers l'origine; les valeurs numériques des coefficients angulaires des droites $M_0 M_\eta$, $M_\eta M_\iota$, $M_\iota M_\lambda, \ldots, M_\varpi M_i$ vont donc en augmentant, de sorte qu'on a

$$\frac{q_\eta}{p - p_\eta} < \frac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota} < \frac{q_\lambda - q_\iota}{p_\iota - p_\lambda} < \ldots < \frac{q_i - q_\varpi}{p_\varpi},$$

le signe $<$ excluant l'égalité. Ainsi, les valeurs infiniment petites de β

construit ceux qui répondent aux différents termes de A'; car aucun de ceux-ci ne peut être, par rapport à la droite mobile, du même côté que l'origine. La séparation du premier membre de l'équation (1) dans les deux polynômes A et A' n'est donc pas indispensable pour la recherche des groupes G_1, G_2, etc.; mais elle l'abrége.

fournies par l'équation

$$G_1 = 0,$$

sont d'un ordre moindre que celles qu'on tire de l'équation

$$G_2 = 0;$$

celles-ci, à leur tour, sont d'un ordre moindre que celles qui sont données par l'équation

$$G_3 = 0,$$

et ainsi de suite.

Considérons en particulier une de ces équations, par exemple l'équation

$$G_2 = 0,$$

qui peut s'écrire

$$A^{(\eta)} \beta^{p_\eta - p_\iota} + A^{(\theta)} \beta^{p_\theta - p_\iota} \alpha^{q_\theta - q_\eta} + \ldots + A^{(\iota)} \alpha^{q_\iota - q_\eta} = 0.$$

L'ordre μ des valeurs de β qu'on en tire étant, comme on l'a vu, égal à $\frac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota}$, si l'on appelle r et s les quotients de $q_\iota - q_\eta$ et de $p_\eta - p_\iota$ par leur plus grand commun diviseur φ, on aura

$$\mu = \frac{r}{s};$$

d'ailleurs, tous les termes de l'équation précédente étant du même ordre, on a

$$\mu(p_\eta - p_\iota) = \mu(p_\theta - p_\iota) + q_\theta - q_\eta = \ldots = q_\iota - q_\eta;$$

il en résulte, en multipliant par s,

$$r(p_\eta - p_\iota) = r(p_\theta - p_\iota) + s(q_\theta - q_\eta) = \ldots = s(q_\iota - q_\eta) = rs\varphi.$$

On voit, par là, que la somme $r(p_\theta - p_\iota) + s(q_\theta - q_\eta)$ étant divisible par s, ainsi que la partie $s(q_\theta - q_\eta)$, l'autre partie $r(p_\theta - p_\iota)$ doit l'être aussi, et comme s est premier avec r, $\frac{p_\theta - p_\iota}{s}$ doit être un nombre entier ψ. Dans l'équation

$$r(p_\theta - p_\iota) + s(q_\theta - q_\eta) = rs\varphi,$$

remplaçons $p_\theta - p_\iota$ par $s\psi$, et il viendra

$$q_\theta - q_\eta = r(\varphi - \psi);$$

l'équation

$$G_2 = 0$$

peut donc se mettre sous la forme

$$A^{(\eta)}\beta^{s\varphi} + A^{(\theta)}\beta^{s\psi}\alpha^{r(\varphi-\psi)} + \ldots + A^{(\iota)}\alpha^{r\varphi} = 0,$$

ou bien, en posant $\beta^s = \alpha^r x$,

$$(2) \qquad A^{(\eta)}x^{\varphi} + A^{(\theta)}x^{\psi} + \ldots + A^{(\iota)} = 0.$$

Cette équation détermine pour x un nombre φ de valeurs toutes différentes de zéro, que nous désignerons par $h_1, h_2, \ldots, h_\varphi$, et que nous supposerons d'abord toutes inégales. Si nous prenons $x = h_1$, et que nous fassions, comme ci-dessus, $\alpha = \rho e^{\tau\sqrt{-1}}$, la relation $\beta^s = \alpha^r x$ nous donnera pour β les s valeurs suivantes :

$$(3) \left\{\begin{array}{ll} \beta_1 = (h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r\tau}{s}\sqrt{-1}}, & \beta_2 = (h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r(\tau+2\pi)}{s}\sqrt{-1}}, \\ \beta_3 = (h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r(\tau+4\pi)}{s}\sqrt{-1}}, \ldots, & \beta_s = (h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r[\tau+2(s-1)\pi]}{s}\sqrt{-1}}; \end{array}\right.$$

où $(h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}}$ désigne une quelconque des valeurs de $\sqrt[s]{h_1\rho^r}$. En remplaçant successivement dans ces valeurs h_1 par $h_2, h_3, \ldots, h_\varphi$, nous aurons toutes les valeurs approchées de β au nombre de $s\varphi = p - p_\eta$, qui correspondent à l'équation

$$G_2 = 0.$$

Lorsque le point Z, après une révolution dans le sens direct autour du point A, revient à sa position initiale C, ρ est redevenu le même sans avoir passé par zéro, et, par conséquent, le facteur $(h_1\rho^r)^{\frac{1}{s}}$ a repris sa valeur initiale. Mais l'angle τ a augmenté de 2π : chacune des s valeurs de β qui composent la suite (3) est donc devenue égale à la valeur initiale de celle qui la suit. Cette conclusion est rigoureuse, bien que les expressions (3) ne soient qu'approchées; en d'autres termes, si l'on appelle β_k et β_{k+1} les valeurs exactes des deux fonctions

de α qui ont pour valeurs approchées

$$(h_1 \rho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r[\tau+(2k-2)\pi]}{s}\sqrt{-1}}, \quad (h_1 \rho^r)^{\frac{1}{s}} e^{\frac{r(\tau+2k\pi)}{s}\sqrt{-1}},$$

je dis qu'après une révolution de Z sur le contour très-petit CLMC, *fig.* 9, la valeur finale de β_k sera exactement égale à la valeur initiale de β_{k+1}.

En effet, le système de toutes les valeurs de β doit se retrouver le même après une révolution de Z, et, par conséquent, la valeur finale de β_k doit être égale à la valeur initiale de quelque autre racine β' de l'équation (1). On voit d'abord que β' doit, comme β_k, se réduire à zéro avec α, et qu'ainsi elle doit être donnée approximativement par une des équations

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \ldots, \quad G_\omega = 0;$$

de plus elle doit être, comme β_k, un infiniment petit de l'ordre $\frac{r}{s} = \frac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota}$; il faut donc qu'elle réponde à l'équation

$$G_2 = 0,$$

puisque les racines qui répondent aux équations

$$G_1 = 0, \quad G_3 = 0, \ldots, \quad G_\omega = 0,$$

sont, ainsi qu'on l'a vu, d'ordres différents. Maintenant, dans les formules (3), les erreurs commises sont des infiniment petits d'un ordre supérieur à $\frac{r}{s}$; la fonction β' ne peut donc être que β_{k+1}, sans quoi sa valeur initiale, qui doit être égale à la valeur finale de β_k, en différerait par une quantité de l'ordre $\frac{r}{s}$.

On voit par ce qui précède que les valeurs infiniment petites de β données par l'équation

$$G_2 = 0,$$

se partagent en φ groupes correspondants aux racines $h_1, h_2, \ldots, h_\varphi$ de l'équation (2), et que les s fonctions qui composent un même groupe

peuvent être rangées circulairement dans un ordre tel, que chacune d'elles devienne égale, après une révolution de Z, à la valeur initiale de la suivante. En d'autres termes, chacun de ces groupes est un système circulaire, n° **18**.

On peut appliquer la même méthode à toutes les équations

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \ldots, \quad G_\omega = 0.$$

Nommons φ_1 le plus grand commun diviseur de $p - p_\eta$ et de q_η, φ_2 celui de $p_\eta - p_\iota$ et de $q_\iota - q_\eta$, φ_3 celui de $p_\iota - p_\lambda$ et de $q_\lambda - q_\iota$, et ainsi de suite; enfin, φ_ω celui de p_ϖ et de $q_\iota - q_\varpi$: appelons $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_\omega$ les nombres entiers $\frac{p-p_\eta}{\varphi_1}, \frac{p_\eta - p_\iota}{\varphi_2}, \frac{p_\iota - p_\lambda}{\varphi_3}, \ldots, \frac{p_\varpi}{\varphi_\omega}$. Nous trouverons que les valeurs infiniment petites de β données par l'équation

$$G_1 = 0$$

se partagent en φ_1 systèmes circulaires composés chacun de s_1 termes: de même, les valeurs données par l'équation

$$G_2 = 0$$

se partagent en φ_2 systèmes circulaires de s_2 termes, et ainsi de suite jusqu'aux valeurs données par l'équation

$$G_\omega = 0,$$

lesquelles se partagent en φ_ω systèmes circulaires de s_ω termes.

Rappelons-nous maintenant qu'en vertu des relations

$$z = a + \alpha, \quad u = b + \beta,$$

les valeurs de β qui s'annulent avec α correspondent aux fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$ de z qui se réduisent à b pour $z = a$, et nous en conclurons que les fonctions de z désignées ci-dessus par u_1, u_2, u_p peuvent toujours être partagées en un certain nombre de systèmes circulaires relativement au point A. Observons que le nombre de ces systèmes peut se réduire à l'unité: s'il y en a plusieurs, le nombre des termes qui les composent peut varier d'un système à l'autre; enfin il peut y avoir des systèmes qui ne soient composés que d'un seul terme.

Ajoutons qu'il est permis de comprendre dans l'énoncé précédent

non-seulement les fonctions u_1, u_2,..., u_p dont les valeurs initiales diffèrent infiniment peu de b, mais encore les autres fonctions u_{p+1}, u_{p+2}, etc., dont les valeurs initiales sont très-peu différentes des racines simples de l'équation

$$f(u, a) = 0.$$

Car chacune de ces dernières, reprenant sa valeur initiale après une révolution du point Z sur le contour CLMC, peut être regardée comme formant un système circulaire composé d'un seul terme. Nous arrivons donc à la proposition suivante :

Les diverses fonctions u_1, u_2,..., u_m qui satisfont à l'équation

$$f(u, z) = 0$$

peuvent toujours se partager, relativement au point A, en un certain nombre de systèmes circulaires.

20. On a admis dans la démonstration précédente que l'équation (2) et les autres équations pareilles qui correspondent aux polynômes G_1, G_3,..., G_ω avaient toutes leurs racines inégales. Supposons à présent que l'équation (2) ait t racines égales à h_1; alors chacune des formules de la suite (3) donne à la fois l'expression approchée de t valeurs de β, et pour les distinguer, il faut recourir à des expressions plus approchées des st valeurs de β correspondantes à la racine h_1.

Pour cela, on posera

$$\alpha = \alpha'^s, \quad \beta = h_1^{\frac{1}{s}} \alpha'^r + \beta';$$

on substituera ces valeurs dans l'équation (1), et l'on obtiendra entre α' et β' une équation (1'), qui devra fournir st valeurs de β' infiniment petites, d'un ordre supérieur au nombre r, α' étant regardé maintenant comme du premier ordre. On appliquera à l'équation (1') la même méthode dont on s'est servi pour distinguer, dans l'équation (1), les termes de l'ordre le moins élevé; on trouvera ainsi, pour déterminer approximativement β', des équations analogues aux équations

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \text{ etc.},$$

et l'on ne conservera que celles qui donnent pour β' des valeurs d'un ordre supérieur à r.

Soit $G' = 0$ une de ces équations; on pourra trouver deux nombres entiers r' et s' tels, qu'en faisant $\beta'^{s'} = \alpha'^{r'} x'$, l'équation $G' = 0$ prenne la forme

$$A' x'^{\varphi'} + B' x'^{\psi'} + \ldots = 0, \tag{2'}$$

analogue à l'équation (2). Admettons que l'équation (2') n'ait pas de racines égales, et soit h' une de ses racines. Parmi les st valeurs de β dont nous nous occupons, il y en aura ss' qui seront données, approximativement, par les formules

$$\alpha'^{s} = \alpha, \quad \beta'^{s'} = \alpha'^{r'} h', \quad \beta = h_1^{\frac{1}{s}} \alpha'^{r} + \beta',$$

ou, ce qui est la même chose, par l'équation

$$\beta = h_1^{\frac{1}{s}} \rho^{\frac{r}{s}} e^{\frac{r(\tau + 2k\pi)}{s}\sqrt{-1}} + h' \rho^{\frac{r'}{ss'}} e^{\frac{r'\left(\frac{\tau + 2k\pi}{s} + 2k'\pi\right)}{s'}\sqrt{-1}},$$

k désignant un des nombres $0, 1, 2, \ldots, s-1$, et k' un des nombres $0, 1, 2, \ldots, s'-1$.

Représentons le second membre par $\beta_{k,k'}$; les ss' valeurs dont il est susceptible pourront être rangées circulairement dans l'ordre suivant :

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_{0,0}, \ \beta_{1,0}, \ \beta_{2,0}, \ldots, \ \beta_{s-1,0}, \ \beta_{0,1}, \ \beta_{1,1}, \ \beta_{2,1}, \ldots, \ \beta_{s-1,1}, \ \beta_{0,2}, \ldots, \\ \beta_{0,s'-1}, \ \beta_{1,s'-1}, \ \beta_{2,s'-1}, \ldots, \ \beta_{s-1,s'-1}. \end{array} \right.$$

Si maintenant nous supposons que le point Z fasse une révolution dans le sens direct sur le contour CLMC, *fig.* 9, l'angle τ croîtra de 2π, et chacune des valeurs de β comprises dans la suite qu'on vient d'écrire deviendra égale à la valeur initiale de la suivante : elles forment donc un système circulaire. Aux diverses racines h' de l'équation (2') répondront de semblables systèmes de valeurs de β, et, par conséquent, la proposition énoncée à la fin du n° **19** ne cesse pas d'être vraie dans le cas qui nous occupe.

Si l'équation (2') avait elle-même des racines multiples, par exemple t' racines égales à h', il répondrait à cette racine $ss't'$ valeurs de β, et chacune des expressions de la suite (3') serait la valeur approchée de

t' d'entre elles. Alors on ferait

$$\alpha = \alpha'^{s} = \alpha''^{ss'}, \quad \beta = h_1^{\frac{1}{s}} \alpha''^{rs'} + h'^{\frac{1}{s'}} \alpha''^{r'} + \beta'';$$

on substituerait ces valeurs dans l'équation (1) et l'on obtiendrait, entre α'' et β'', une équation (1″) qui devrait fournir, pour β'', $ss't'$ valeurs infiniment petites d'un ordre supérieur à r', α'' étant regardé comme du premier ordre. On continuera l'application de cette méthode, jusqu'à ce qu'on ait des expressions approchées distinctes pour toutes les valeurs infiniment petites de β, et cela arrivera nécessairement, sans quoi il y aurait des valeurs de β égales entre elles, quel que fût α, c'est-à-dire des valeurs de u égales entre elles, quel que fût z, et l'équation

$$f(u, z) = 0$$

ne serait pas irréductible. On voit en même temps, par la forme de ces expressions approchées, que les valeurs de β se partageront toujours en systèmes circulaires; nous pouvons donc conclure enfin que la proposition du n° **19** est vraie dans tous les cas.

21. Nous venons de prouver que les fonctions de z désignées par $u_1, u_2, \ldots, u_p$, se partagent toujours en un certain nombre de systèmes circulaires; nous avons donné, de plus, une méthode pour effectuer ce partage. Il ne sera pas inutile de faire voir que la même méthode fournit les expressions de ces fonctions en séries convergentes ordonnées suivant les puissances fractionnaires de $z - a$.

Lorsque le nombre p se réduit à l'unité, on retombe sur le cas déjà traité au n° **14**, où la fonction u_1 se développe suivant les puissances entières de $z - a$. Passons au cas du n° **18**, où le nombre p étant quelconque, la dérivée $\frac{df(u, z)}{dz}$ est supposée ne pas s'annuler pour $u = b$, $z = a$.

Conservons les notations de ce numéro; seulement, mettons l'équation (1) sous la forme

$$A\beta^p + B\alpha + \sum C\beta^q\alpha^r = 0,$$

où r ne peut être nul, à moins que q ne soit plus grand que p, et

où q ne peut être nul, à moins que r ne soit plus grand que 1. Faisons $\alpha = \alpha'^p$, α' désignant une nouvelle variable; les p valeurs infiniment petites de β seront du même ordre que α' : si donc on pose $\beta = \alpha' v$, les p valeurs correspondantes de v seront finies. L'équation (1) devient alors, en la divisant par α'^p,

$$(4) \qquad \mathrm{A} v^p + \mathrm{B} + \sum \mathrm{C} v^q \alpha'^{(r-1)p+q} = 0,$$

où l'exposant $(r-1)p+q$ est au moins l'unité : on voit bien que pour $\alpha' = 0$, elle donne p valeurs de v finies et inégales que nous appellerons $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ et qui sont les diverses valeurs de $\sqrt[p]{-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}}$. Si maintenant nous appelons v_n la fonction continue de α' qui, satisfaisant à l'équation (4), se réduit à γ_n pour $\alpha' = 0$, nous conclurons du n° **14** qu'elle peut se développer en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières de α', tant que le module de α' reste inférieur au plus petit des modules des valeurs de α' différentes de zéro qui font acquérir à l'équation (4) des racines égales ou infinies. Nous pouvons donc poser, dans ces limites,

$$v_n = \gamma_n + a_n \alpha' + b_n \alpha'^2 + c_n \alpha'^3 + \ldots,$$

où les coefficients a_n, b_n, c_n, etc., sont des fonctions rationnelles de γ_n et des coefficients de l'équation (4) et s'obtiennent sans difficulté par le théorème de Taylor. Nous aurons, par conséquent, en appelant β_n la valeur correspondante de β,

$$\beta_n = \gamma_n \alpha' + a_n \alpha'^2 + b_n \alpha'^3 + c_n \alpha'^4 + \ldots,$$

ou bien

$$\beta_n = \gamma_n \alpha^{\frac{1}{p}} + a_n \alpha^{\frac{2}{p}} + b_n \alpha^{\frac{3}{p}} + c_n \alpha^{\frac{4}{p}} + \ldots.$$

Comme le module de α augmente ou diminue en même temps que celui de α', cette formule sera applicable tant que le module de α sera inférieur au plus petit des modules des valeurs de α autres que zéro, qui font acquérir des racines égales à l'équation (1). En d'autres termes, tant que le point Z sera renfermé dans le cercle décrit du point A comme centre avec la plus petite des distances AA′, AA″, etc.,

pour rayon, on aura l'équation

$$u_n = \gamma_n (z-a)^{\frac{1}{p}} + a_n (z-a)^{\frac{2}{p}} + b_n (z-a)^{\frac{3}{p}} + c_n (z-a)^{\frac{4}{p}} + \ldots.$$

En y remplaçant successivement l'indice n par chacun des nombres $1, 2, \ldots, p$, on obtiendra les expressions des p fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$ en séries convergentes ordonnées suivant les puissances fractionnaires de $z-a$.

22. Supposons maintenant, comme au n° **19**, que la dérivée $\frac{df(u,z)}{dz}$ s'annule pour $u=a$, $z=b$, de sorte que le terme $B\alpha$ manque dans l'équation (1). Considérons, en particulier, les $s\varphi$ valeurs infiniment petites de β qui sont données approximativement par l'équation

$$G_2 = 0,$$

et observons que l'équation (1), à laquelle elles satisfont exactement, peut se mettre sous la forme

$$G_2 + \sum C\beta^k \alpha^l = 0,$$

les termes de la somme $\sum$ étant d'un ordre plus élevé que ceux de G_2, quand on regarde α comme du premier ordre et β comme de l'ordre $\mu = \frac{r}{s}$: cela revient à dire qu'on aura

$$\frac{r}{s} k + l > \frac{r}{s} p_\eta + q_\eta,$$

ou bien

$$r(k-p_\eta) + s(l-q_\eta) > 0,$$

le signe $>$ excluant l'égalité.

Faisons maintenant $\alpha = \alpha'^s$; les valeurs de β dont nous occupons seront du même ordre que α'^r, et si nous posons $\beta = \alpha'^r v$, les $s\varphi$ valeurs correspondantes de v seront finies. L'équation (1) devient alors, en la divisant par $\alpha'^{rp_\eta + sq_\eta}$,

$$\overset{(\eta)}{A} v^{p_\eta} + \overset{(\theta)}{A} v^{p_\theta} + \ldots + \overset{(\iota)}{A} v^{p_\iota} + \sum C v^k \alpha'^{r(k-p_\eta)+s(l-q_\eta)} = 0,$$

ou bien, en désignant par σ un nombre entier au moins égal à 1,

$$(5)\qquad v^{p_\iota}\left(A^{(\eta)} v^{s\varphi} + A^{(\theta)} v^{s\psi} + \ldots + A^{(\iota)}\right) + \sum C v^k \alpha'^{\sigma} = 0.$$

On voit, en effet, que, pour $\alpha' = 0$, cette équation se réduisant à

$$(6)\qquad A^{(\eta)} v^{s\varphi} + A^{(\theta)} v^{s\psi} + \ldots + A^{(\iota)} = 0,$$

donne pour v un nombre $s\varphi$ de valeurs finies et différentes de zéro : en désignant comme ci-dessus par $h_1, h_2, \ldots, h_\varphi$ les racines de l'équation (2), celles de l'équation (6), que nous appellerons $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{s\varphi}$, ne seront autre chose que les diverses valeurs des radicaux $\sqrt[s]{h_1}$, $\sqrt[s]{h_2}, \ldots, \sqrt[s]{h_\varphi}$; elles seront donc toutes inégales, si l'équation (2) a elle-même toutes ses racines inégales, ce que nous supposerons d'abord.

Nommons v_n la fonction continue de α' qui, satisfaisant à l'équation (5), se réduit à γ_n pour $\alpha' = 0$; on pourra, d'après le n° **14**, la développer suivant les puissances entières de α', tant que le module de α' restera inférieur au plus petit des modules des valeurs de α' autres que zéro qui font acquérir à l'équation (5) des racines égales ou infinies. Soit donc, dans ces limites,

$$v_n = \gamma_n + a_n \alpha' + b_n \alpha'^2 + \ldots;$$

il s'ensuivra, en appelant β_n la valeur correspondante de β,

$$\beta_n = \gamma_n \alpha'^r + a_n \alpha'^{r+1} + b_n \alpha'^{r+2} + \ldots,$$

ou bien

$$\beta_n = \gamma_n \alpha^{\frac{r}{s}} + a_n \alpha^{\frac{r+1}{s}} + b_n \alpha^{\frac{r+2}{s}} + \ldots.$$

Par conséquent, celles des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$ qui sont déterminées approximativement par l'équation

$$G_2 = 0$$

seront exprimées par la série

$$\gamma_n (z-a)^{\frac{r}{s}} + a_n (z-a)^{\frac{r+1}{s}} + b_n (z-a)^{\frac{r+2}{s}} + \ldots,$$

où l'indice n doit être remplacé successivement par les nombres 1, 2,..., n, et les formules ainsi obtenues seront applicables, tant que le point Z sera renfermé dans le cercle décrit du point A comme centre avec la plus petite des distances AA′, AA″, etc., pour rayon.

23. Admettons ensuite, comme au nº **20**, que l'équation (2) ait t racines égales à h_1, mais que l'équation (2′) ait toutes ses racines inégales. En conservant les notations de ce numéro, et posant

$$\alpha' = \alpha''^{s'}, \quad \beta' = \alpha''^{r'} v,$$

on verra, comme tout à l'heure, que les fonctions v qui répondent aux valeurs de β' déterminées approximativement par l'équation

$$G' = 0,$$

ont, pour $\alpha'' = 0$, des valeurs finies inégales et peuvent être développées suivant les puissances entières de α''. Les valeurs correspondantes de β seront donc exprimées par des séries de la forme

$$h_1^{\frac{1}{s}} \alpha'^r + \gamma_n \alpha''^{r'} + a_n \alpha''^{r'+1} + b_n \alpha''^{r'+2} + \ldots$$

$$= h_1^{\frac{1}{s}} \alpha''^{rs'} + \gamma_n \alpha''^{r'} + a_n \alpha''^{r'+1} + b_n \alpha''^{r'+2} + \ldots,$$

et, par conséquent, celles des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$, qui répondent à l'équation

$$G' = 0,$$

pourront se développer sous la forme

$$h_1^{\frac{1}{s}} (z-a)^{\frac{rs'}{ss'}} + \gamma_n (z-a)^{\frac{r'}{ss'}} + a_n (z-a)^{\frac{r'+1}{ss'}} + b_n (z-a)^{\frac{r'+2}{ss'}} + \ldots.$$

Si l'équation (2′) avait elle-même des racines égales, on continuerait l'application de cette méthode, jusqu'à ce qu'on arrivât à une équation analogue aux équations (2) et (2′) qui n'eût plus de racines égales. De cette manière, on trouvera pour toutes les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$, des expressions en séries ordonnées suivant les puissances fractionnaires de $z - a$, et ces développements resteront exacts, tant que le

point Z restera dans l'intérieur d'un cercle décrit du point A comme centre avec la plus petite des distances AA', AA'', etc., pour rayon.

On voit que si l'on appelle μ le nombre des termes du système circulaire auquel la fonction u_n appartient relativement au point A, cette fonction pourra toujours être développée en série convergente suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$ dans les limites qu'on vient d'indiquer : en d'autres termes, le dénominateur des exposants fractionnaires de $z-a$, dans ce développement, sera égal au nombre des révolutions que le point Z doit accomplir sur un très-petit contour renfermant le point A, pour que la fonction u_n reprenne sa valeur initiale. Ajoutons d'ailleurs que si l'on se borne à déterminer ce dénominateur par la méthode expliquée précédemment, on pourra ensuite se servir de la méthode des coefficients indéterminés pour calculer les coefficients des séries dont il s'agit.

24. Appliquons maintenant cette théorie à quelques exemples, et d'abord considérons l'équation binôme

$$u^m-(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots=0,$$

où les quantités a, a', a'', etc., sont supposées toutes inégales. Pour $z=a$, les m valeurs de u qu'on en tire sont toutes nulles, et comme la dérivée $\frac{df(z,u)}{dz}$ se réduit ici, pour $u=0$, $z=a$, à la quantité $-(a-a')(a-a'')$ etc., qui n'est pas nulle, on tombe sur le cas du n° **18**. On en conclut que les m valeurs de u forment autour du point A un seul système circulaire, et qu'elles peuvent être exprimées par des séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{m}}$, tant que le point Z est renfermé dans un cercle qui a pour centre le point A et pour rayon la plus petite des distances AA', AA'', etc.

25. Prenons pour second exemple l'équation

$$u^m-(z-a)^l(z-a')^{l'}(z-a'')^{l''}\ldots=0,$$

où les quantités a, a', a'', etc., sont toujours supposées inégales, et

où l'exposant l surpasse l'unité. Les m valeurs de u qu'on en tire se réduisent à zéro pour $z = a$, et comme la dérivée $\frac{df(u, z)}{dz}$ s'annule aussi pour $z = a$, on se trouve dans le cas du nº **19**. Faisons

$$z = a + \alpha, \quad u = \beta;$$

l'équation proposée devient

$$\beta^m - \alpha^l (a - a' + \alpha)^{l'} (a - a'' + \alpha)^{l''} \ldots = 0,$$

où le polynôme Λ du nº **19** est simplement $\beta^m - B\alpha^l$, en posant, pour abréger,

$$(a - a')^{l'} (a - a'')^{l''} \ldots = B;$$

les groupes G_1, G_2, etc., se réduisent donc à un seul qui est $\beta^m - B\alpha^l$. Appelons φ le plus grand commun diviseur de m et de l, et s le quotient $\frac{m}{\varphi}$; l'équation (2) du même numéro sera ici

$$x^\varphi - B = 0.$$

Comme elle n'a pas de racines égales, on en conclut que les m valeurs de u se partagent relativement au point A en φ systèmes circulaires composés chacun de s termes. De plus, ces diverses valeurs de u peuvent être développées suivant les puissances entières de $(z - a)^{\frac{1}{s}}$, tant que le point Z reste dans l'intérieur d'un cercle défini comme au numéro précédent.

26. Considérons, en troisième lieu, l'équation

$$u^3 - u + z = 0,$$

qui, pour $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$, a une racine double égale à $+\frac{1}{\sqrt{3}}$, et une racine simple égale à $-\frac{2}{\sqrt{3}}$. Soit A le point qui répond à $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$, prenons un point infiniment voisin C pour point de départ de Z, et désignons par u_1, u_2, u_3, trois fonctions satisfaisant à l'équation proposée, dont les deux premières aient des valeurs initiales très-peu

différentes de $+\frac{1}{\sqrt{3}}$, la valeur initiale de la troisième différant très-peu de $-\frac{2}{\sqrt{3}}$. La fonction u_3 reprendra sa valeur initiale après une révolution de Z sur le contour très-petit CLMC, *fig.* 9, qui entoure le point A, nº **7**; pour savoir ce qui arrive aux deux autres, il suffit d'observer que, la dérivée $\frac{df(u,z)}{dz}$ étant égale à $+1$, on est ici dans le cas du nº **18**, et qu'ainsi les fonctions u_1 et u_2 forment un système circulaire, c'est-à-dire que chacune d'elles prend la valeur initiale de l'autre après une révolution du point Z.

Ces deux fonctions pourront donc, nº **21**, être développées en séries suivant les puissances entières de $\left(z-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$: pour effectuer ces développements, on fera dans l'équation proposée, conformément à la méthode expliquée ci-dessus,

$$z=\frac{2}{3\sqrt{3}}+\alpha,\quad u=\frac{1}{\sqrt{3}}+\beta;$$

il viendra

$$\sqrt{3}\,\beta^2+\beta^3+\alpha=0,$$

ou bien, en posant $\alpha=\alpha'^2$, $\beta=\alpha' v$,

$$\sqrt{3}\,v^2+1+\alpha' v^3=0.$$

Soient v_1 et v_2 les valeurs de v tirées de cette équation qui, pour $\alpha'=0$, se réduisent respectivement aux quantités finies $+\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{3}}$, $-\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{3}}$; pour développer v_1 suivant les puissances entières de α', il suffira de faire dans l'équation précédente

$$v=+\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{3}}+A\alpha'+B\alpha'^2+C\alpha'^3+\ldots,$$

puis d'égaler à zéro les coefficients des diverses puissances de α'. On

aura ainsi les valeurs des coefficients A, B, C, etc., et l'on trouvera

$$v_1 = +\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{3}} + \frac{1}{6}\alpha' - \frac{5\sqrt{-1}}{24\left(\sqrt[4]{3}\right)^3}\alpha'^2$$

$$-\frac{1}{9\sqrt{3}}\alpha'^3 + \frac{77\sqrt{-1}}{1152\sqrt[4]{3}}\alpha'^4 + \frac{7}{162}\alpha'^5 + \ldots;$$

la fonction v_2 s'en déduira en changeant le signe de $\sqrt{-1}$. On conclut de là

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt[4]{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$-\frac{5\sqrt{-1}}{24\left(\sqrt[4]{3}\right)^3}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{9\sqrt{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2$$

$$+\frac{77\sqrt{-1}}{1152\sqrt[4]{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{162}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^3 + \ldots,$$

et en changeant le signe de $\sqrt{-1}$, on aura u_2.

D'ailleurs l'équation proposée n'acquiert de racines multiples que pour les valeurs $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$: le module de la différence de ces deux nombres, ou la distance des points correspondants A et A' étant $\frac{4}{3\sqrt{3}}$, la formule précédente sera applicable, tant que le module de $z - \frac{2}{3\sqrt{3}}$ sera moindre que $\frac{4}{3\sqrt{3}}$, ou bien tant que le point Z restera dans l'intérieur d'un cercle décrit du point A comme centre avec un rayon égal à $\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

Dans les mêmes limites, la fonction u_3 pourra se développer suivant les puissances entières de $z - \frac{2}{3\sqrt{3}}$, et l'on trouvera sans peine

$$u_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{9\sqrt{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2$$

$$-\frac{7}{81}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{10}{81\sqrt{3}}\left(z - \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^4 + \ldots.$$

27. Pour dernier exemple, nous traiterons encore l'équation

$$\begin{aligned} &A(u-b)^7 + B(u-b)^5(z-a) + C(u-b)^4(z-a)^4 \\ &+ D(u-b)^2(z-a)^5 + E(u-b)(z-a)^7 + F(z-a)^9 \\ &+ G(u-b)^8 + H(u-b)^4(z-a)^5 + I(z-a)^{10} = 0, \end{aligned}$$

où les coefficients A, B, C, D, E, F sont supposés différents de zéro, et qui a, pour $z=a$, sept racines égales à b.

Le point de départ C de Z étant supposé très-voisin du point A qui répond à $z=a$, il y aura sept fonctions de z satisfaisant à l'équation proposée et ayant des valeurs initiales très-peu différentes de b. Il s'agit de savoir comment les valeurs de ces fonctions s'échangent les unes dans les autres après une révolution de Z sur un contour fermé très-petit CLMC, *fig.* 9, tracé autour du point A.

La dérivée $\frac{df(u,z)}{dz}$ s'annulant pour $z=a$, $u=b$, faisons, comme au n° **19**,

$$z = a + \alpha, \quad u = b + \beta;$$

l'équation proposée deviendra

$$\begin{aligned} &A\beta^7 + B\beta^5\alpha + C\beta^4\alpha^4 + D\beta^2\alpha^5 + E\beta\alpha^7 + F\alpha^9 \\ &+ G\beta^8 + H\beta^4\alpha^5 + I\alpha^{10} = 0. \end{aligned}$$

Le polynôme Λ est ici

$$A\beta^7 + B\beta^5\alpha + C\beta^4\alpha^4 + D\beta^2\alpha^5 + E\beta\alpha^7 + F\alpha^9 :$$

construisons les points $M_0, M_1, \ldots, M_5$ correspondants aux différents termes de Λ et qui ont pour coordonnées

$$\begin{aligned} &x_0 = 7, \quad y_0 = 0; \quad x_1 = 5, \quad y_1 = 1; \quad x_2 = 4, \quad y_2 = 4; \\ &x_3 = 2, \quad y_3 = 5; \quad x_4 = 1, \quad y_4 = 7; \quad x_5 = 0, \quad y_5 = 0. \end{aligned}$$

Cela fait, nous verrons aisément que la droite M_0O étant supposée tourner autour du point M_0 de manière à couper la partie positive de l'axe des y, rencontrera d'abord le point M_1 ; que cette même droite, tournant ensuite autour de M_1, rencontrera le point M_3 avant tous les autres; et, enfin, que cette droite, en tournant autour de M_3, arrivera à contenir à la fois les points M_4 et M_5. Les groupes G seront

donc au nombre de trois, savoir :

$$G_1 = A\beta^7 + B\beta^2\alpha^5,$$
$$G_2 = B\beta^5\alpha + D\beta^2\alpha^5,$$
$$G_3 = D\beta^2\alpha^5 + E\beta\alpha^7 + F\alpha^9.$$

Pour le premier, on a

$$s = 2, \quad \varphi = 1,$$

et l'équation (2) du n° **19** est

$$Ax + B = 0 :$$

à ce groupe répondent, par conséquent, deux fonctions de u et de z qui forment un système circulaire autour du point A, et qui, dans certaines limites, se développent en séries convergentes suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{2}}$.

Pour le deuxième groupe, on a

$$s = 3, \quad \varphi = 1,$$

et l'équation (2) est

$$Bx + D = 0 :$$

à ce groupe répond donc un système circulaire composé de trois fonctions qui se développent suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{3}}$.

Pour le troisième, on a

$$s = 1, \quad \varphi = 2,$$

et l'équation (2) est

$$Dx^2 + Ex + F = 0.$$

Admettons d'abord que cette équation ait ses racines inégales; alors à ce groupe répondront deux systèmes circulaires d'un seul terme chacun, c'est-à-dire deux fonctions de z dont chacune reprend sa propre valeur initiale après une révolution de Z, et qui peuvent se développer suivant les puissances entières de $z - a$. Admettons ensuite que l'équation (2) ait ses racines égales, de sorte qu'on ait à la fois

$$Dh^2 + Eh + F = 0, \quad 2Dh + E = 0.$$

C'est ici le cas du n° **20**; comme on a

$$r = 2, \quad s = 1,$$

on fera

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = h\alpha'^2 + \beta' :$$

en substituant ces valeurs dans l'équation entre α et β mise sous la forme

$$\alpha^5(D\beta^2 + E\beta\alpha^2 + F\alpha^4) + A\beta^7 + B\beta^5\alpha + C\beta^4\alpha^4 + G\beta^8 + H\beta^4\alpha^5 + I\alpha^{10} = 0,$$

il viendra, en laissant la lettre α au lieu de α',

$$D\beta'^2\alpha^5 + A(h^7\alpha^{14} + \ldots) + B(h^5\alpha^{11} + \ldots) + C(h^4\alpha^{12} + \ldots) + G(h^8\alpha^{16} + \ldots) + H(h^4\alpha^{13} + \ldots) + I\alpha^{10} = 0.$$

Dans chaque parenthèse, les termes non écrits sont d'un ordre plus élevé que le terme conservé, attendu que β' est d'un ordre supérieur à celui de α^2. On voit que les groupes G' se réduiront à un seul, qui sera

$$D\beta'^2\alpha^5 + I\alpha^{10},$$

en supposant que I ne soit pas nul. On aura alors

$$r' = 5, \quad s' = 2, \quad \varphi' = 1,$$

et l'équation (2') sera

$$Dx' + I = 0.$$

Comme elle n'a pas de racines égales, puisqu'elle est du premier degré, et qu'on a

$$ss' = 2,$$

on voit que les deux valeurs de u qui correspondent au groupe G_3 forment un seul système circulaire, et que chacune d'elles est développable en série suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{2}}$. Mais si le coefficient I était nul, le groupe G' serait

$$D\beta'^2\alpha^5 + Bh^5\alpha^{11} :$$

on aurait alors

$$r' = 3, \quad s' = 1, \quad \varphi' = 2,$$

et l'équation (2') serait

$$Dx'^2 + Bh^5 = 0.$$

Comme elle a ses racines inégales et que le produit ss' se réduit à l'unité, on voit que, dans ce cas, chacune des valeurs de u qui répondent au groupe G_3 reprend sa propre valeur initiale après une révolution de Z, et que ces deux valeurs peuvent être développées en séries suivant les puissances entières de $z - a$.

28. Nous avons cherché, dans ce qui précède, comment s'échangent entre elles les valeurs des fonctions de $u_1, u_2, \ldots, u_p$, lorsque le point Z décrit autour du point A un contour infiniment petit; il y a encore un autre cas qu'il est à propos d'examiner spécialement.

Prenons pour point de départ de Z un point C correspondant à une valeur quelconque c de z, avec la condition, toutefois, que l'équation

$$f(u, c) = 0$$

n'ait pas de racines égales; soient toujours A, A', A'', etc., les points correspondants aux valeurs a, a', a'', etc., de z qui font acquérir des racines multiples à l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et supposons que l'équation

$$f(u, a) = 0$$

ait p racines égales à b. Joignons le point C au point A par une ligne CDA, *fig.* 12, tracée arbitrairememt, mais de manière à ne passer par aucun des points A, A', A'', etc.; puis désignons par $u_1, u_2, \ldots, u_p$ les p fonctions de z qui, satisfaisant à l'équation

$$f(u, z) = 0;$$

et ayant au point C les valeurs initiales $b_1, b_2, \ldots, b_p$, acquièrent en A la valeur commune b, lorsque Z y arrive par le chemin CDA. Prenons sur cette ligne un point D infiniment voisin de A, et imaginons un contour fermé infiniment petit DNPD qui entoure le point A, en ne faisant autour de ce point qu'une circonvolution. Cela posé, nous donnerons le nom de *contour élémentaire* au contour qui se compose

de la ligne CD, du contour infiniment petit DNP, et, enfin, de la ligne DC, de sorte que le point Z, en le parcourant, décrit deux fois la ligne CD, mais dans des sens contraires.

Voyons maintenant ce que deviennent les fonctions u_1, u_2,..., u_p après une révolution de Z sur un pareil contour : soient d'abord β_1, β_2,..., β_p les valeurs qu'elles acquièrent, lorsque Z arrive pour la première fois en D. Le point mobile parcourt ensuite le contour infiniment petit DNPD ; or on a prouvé que les fonctions u_1, u_2,..., u_p pouvaient se partager, relativement au point A, en un certain nombre de systèmes circulaires : soit u_1, u_2,..., u_{n-1}, u_n un de ces systèmes, de façon qu'après une révolution de Z sur DNPD, les fonctions qui le composent aient acquis respectivement les valeurs β_2, β_3,..., β_n, β_1. Lorsqu'ensuite le point Z, achevant de décrire le contour élémentaire, ira de D en C, la fonction u_1, qui avait en D la valeur β_2, prendra en C la valeur b_2; car autrement, si Z revenait en arrière au point D, u_1 ne reprendrait pas la valeur β_2 : de même les fonctions u_2,..., u_{n-1}, u_n acquerront en C les valeurs b_3,..., b_n, b_1. Par conséquent, les fonctions u_1, u_2,..., u_p jouiront, par rapport au contour élémentaire CDNPDC, des mêmes propriétés qui ont été démontrées pour le contour infiniment petit DNPD. Les systèmes circulaires seront dans les deux cas en même nombre et composés des mêmes termes rangés dans le même ordre : on les déterminera toujours en cherchant, par la méthode expliquée ci-dessus, les valeurs approchées des fonctions u_1, u_2, etc., pour une valeur de z infiniment peu différente de a.

Quant aux fonctions u_{p+1}, u_{p+2}, etc., dont les valeurs au point A sont des racines simples de l'équation

$$f(u, a) = 0,$$

il est clair, n° 7, qu'après une révolution de Z sur le contour élémentaire CDNPDC, chacune d'elles reprend simplement sa valeur initiale.

29. Supposons maintenant que le point Z, partant du point C, décrive autour du point A une ligne fermée de forme quelconque, mais qui puisse se réduire au contour élémentaire CDNPDC sans franchir

aucun des points A, A'; A'', etc. : on conclura du n° 6 que les valeurs des fonctions u_1, u_2, etc., s'échangeront sur cette ligne absolument comme sur le contour élémentaire.

30. Joignons le point C aux différents points A, A', A'', etc., par des lignes CDA, CD'A', CD''A'', etc., *fig.* 12, tracées arbitrairement, sauf la condition que la ligne menée à chacun de ces points ne passe par aucun des autres : soient D, D', D'', etc., des points situés sur ces lignes à des distances infiniment petites des points A, A', A'', etc.; traçons autour de ces derniers les contours fermés infiniment petits DNPD, D'N'P'D', D''N''P''D'', etc., et imaginons les contours élémentaires CDNPDC, CD'N'P'D'C, CD''N''P''D''C, etc., que nous désignerons, pour abréger, par les notations (A), (A'), (A''), etc. Cela posé, étant donné un contour fermé quelconque passant par le point C, on pourra toujours, sans lui faire franchir aucun des points A, A', A'', etc., et sans déplacer le point C, le déformer de façon à le réduire à une suite de contours élémentaires. Cette assertion n'a pas besoin d'être démontrée, et il suffit d'un peu d'attention pour en apercevoir l'exactitude.

Par exemple, le contour CLMC de la *fig.* 13 se réduira au contour élémentaire CDNPDC ou (A). Le contour CLMC de la *fig.* 14 se réduira au contour (A) parcouru deux fois de suite. Le contour CLMC de la *fig.* 15 se réduira aux trois contours (A), (A'), (A''), parcourus successivement. Enfin le contour CLMC de la *fig.* 16 se réduira à la suite des contours élémentaires (A'), (A''), (A'), (A), (A'). Sous ce point de vue, un contour fermé quelconque passant par le point C sera caractérisé par la série des contours élémentaires auxquels on peut le réduire.

Toutefois il importe d'indiquer dans quel sens chaque contour élémentaire est parcouru : pour cela nous représenterons le contour (A) par (+ A) ou par (— A), suivant que le point Z sera supposé le parcourir dans le sens direct ou dans le sens inverse, n° **18**, et nous ne conserverons la notation (A) que pour le cas où il sera inutile d'indiquer dans quel sens ce contour est décrit. Ainsi le contour CLMC de la *fig.* 13 se réduira à (+ A) ou à (— A), suivant que le point Z le parcourra dans le sens CLMC ou dans le sens CMLC : de même, le

contour CLMC de la *fig.* 16 se réduira à la suite $(+A')$, $(+A'')$, $(-A')$, $(-A)$, $(+A')$, s'il est parcouru dans le sens CLMC, et à la suite $(-A')$, $(+A)$, $(+A')$, $(-A'')$, $(-A')$, s'il est parcouru en sens contraire. (On peut observer que pour déduire cette seconde suite de la première, il suffit de renverser l'ordre des termes et de changer leurs signes : cette remarque est générale.)

Ces notations adoptées, un contour fermé passant par le point C et parcouru dans un sens déterminé, pourra, quelle que soit sa forme [*], être représenté par la suite des contours élémentaires auxquels on le réduit en le déformant : cette suite, dont chaque terme doit être affecté d'un signe convenable, ainsi qu'on vient de l'expliquer, est ce que nous appellerons la *caractéristique du contour*. Ainsi les contours CLMC des *fig.* 13, 14, 15, 16 étant supposés parcourus dans le sens CLMC, auront pour caractéristiques respectives

$$(+A),\quad (+A)(+A),\quad (+A)(+A')(+A''),$$
$$(+A')(+A'')(-A')(-A)(+A'),$$

et, s'ils sont parcourus dans le sens contraire, leurs caractéristiques seront

$$(-A),\quad (-A)(-A),\quad (-A'')(-A')(-A),$$
$$(-A')(+A)(+A')(-A'')(-A').$$

Dans le cas où un contour fermé pourra se réduire au seul point C sans franchir aucun des points A, A', A'', etc., nous lui donnerons (o) pour caractéristique : il est clair qu'on est libre d'introduire ou de supprimer dans la caractéristique d'un contour des termes (o) en tel nombre et à telles places qu'on voudra.

On voit facilement que les points A, A', A'', etc., restant les mêmes ainsi que le point C et les lignes CDA, CD'A', CD''A'', etc., un même contour, parcouru dans un même sens, n'est susceptible que d'une seule caractéristique (sauf les termes (o) qu'on peut toujours supprimer). Deux contours qui ont la même caractéristique peuvent toujours se réduire l'un à l'autre sans franchir aucun des points A, A',

[*] On exclut toujours le cas où ce contour passerait par quelqu'un des points A, A', A'', etc.

A″, etc.; et, au contraire, deux contours qui, dans quelque sens qu'on les suppose parcourus, ont des caractéristiques différentes, ne peuvent pas se réduire l'un à l'autre. Observons encore que si les lignes CDA, CD′A′, CD″A″, etc., viennent à changer de forme, la caractéristique d'un contour donné restera la même, tant que ces lignes ne franchiront aucun des points A, A′, A″, etc.

31. De ce qu'on vient de dire et de la proposition énoncée au nº **6**, on conclut que si deux contours fermés passant par le point C ont la même caractéristique, la fonction u_1 de z, déterminée par l'équation

$$f(u, z) = 0$$

et par une valeur initiale b_1 choisie parmi les racines de l'équation

$$f(u, c) = 0,$$

acquerra une seule et même valeur, lorsque le point Z, parti de la position C, y reviendra après avoir parcouru l'un ou l'autre de ces deux contours, ou bien encore la suite des contours élémentaires représentés par leur caractéristique commune.

Si donc on appelle $u_1, u_2, \ldots, u_m$ les m fonctions de z déterminées par l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et ayant respectivement pour valeurs initiales les m racines $b_1, b_2, \ldots,$ b_m de l'équation

$$f(u, c) = 0,$$

il sera facile de savoir quelle valeur prend chacune de ces fonctions, lorsque le point Z revient en C après avoir parcouru un contour fermé dont la caractéristique est donnée.

En effet, substituons au contour proposé la série des contours élémentaires représentés par les différents termes de la caractéristique : après que le point Z aura parcouru le premier de ces contours, la fonction u_n aura acquis une valeur b_p qu'on saura déterminer, nº **28** ; il suffira pour cela de savoir quelle est la fonction qui suit ou qui précède u_n dans le système circulaire dont elle fait partie relativement à celui des points A, A′, etc., qui est renfermé dans le contour élé-

mentaire. Soit maintenant b_q la valeur que prend la fonction u_p après une révolution de Z sur le deuxième contour élémentaire; il est clair que u_n acquerra cette même valeur b_q, lorsque Z aura décrit les deux premiers. Pareillement, sachant quelle est la valeur b_r que prend u_q après une révolution de Z sur le troisième contour élémentaire, on en conclura que u_n acquiert cette même valeur b_r après que Z a décrit les trois premiers contours. En continuant ainsi, on trouvera la valeur que prend la fonction u_n, quand le point Z a parcouru tous les contours élémentaires dont se compose la caractéristique, ou, ce qui est la même chose, quand ce point a parcouru le contour proposé.

32. Prenons pour exemple l'équation

$$u^3 - u + z = 0,$$

dont nous nous sommes déjà occupés. Les valeurs de z qui lui font acquérir des racines égales sont $+\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ et correspondent à deux points A et A' situés sur l'axe des x à une distance $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ de l'origine des coordonnées et de part et d'autre. Choisissons cette origine C pour point de départ de Z et nommons u_1, u_2, u_3 les trois fonctions de z qui satisfont à l'équation proposée, et dont les valeurs initiales sont respectivement 0, $+1$, -1. Prenons les droites CA, CA' pour les lignes avec lesquelles les contours élémentaires (A) et (A') se confondent sensiblement, n° **28** : lorsque Z va de C en A par la droite CA, les trois valeurs de u restent réelles, et de l'équation

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{1 - 3u^2},$$

on conclut que u_1 augmente, tandis que u_2 et u_3 vont en diminuant. Au point A, on a

$$u_1 = u_2,$$

et, ainsi qu'on l'a vu plus haut, n° **26**, ces deux fonctions forment autour de ce point un système circulaire; par conséquent, après une révolution de Z sur le contour élémentaire ($\pm$ A), chacune des fonctions u_1, u_2, a pris la valeur initiale de l'autre, tandis que u_3 a repris

sa propre valeur initiale. On trouve de même, après une révolution de Z sur le contour élémentaire $(\pm A')$, que chacune des fonctions u_1, u_3 a pris la valeur initiale de l'autre, tandis que u_2 a repris sa propre valeur initiale. De là on conclut sur-le-champ la valeur que prend une quelconque de ces fonctions après une révolution de Z sur un contour fermé dont on connaît la caractéristique.

Ainsi, proposons-nous de trouver la valeur de u_1 après une révolution de Z sur le contour

$$(\pm A)(\pm A')(\pm A)(\pm A)(\pm A)(\pm A'):$$

ici, comme dans tous les cas où les systèmes circulaires n'ont qu'un ou deux termes, le signe + ou le signe −, qui accompagne la caractéristique de chaque contour élémentaire, est indifférent. Après une révolution sur le contour $(\pm A)$, u_1, qui était d'abord égale à zéro, a pris la valeur initiale $+1$ de u_2; la fonction garde cette même valeur après que Z a décrit le contour $(\pm A')$; ensuite les trois révolutions sur le contour $(\pm A)$ lui font acquérir successivement les valeurs 0, $+1$, 0; enfin la révolution de Z sur le contour $(\pm A')$ fait prendre à la fonction la valeur -1.

33. Considérons encore l'équation

$$u^3 - (z-a)(z-a')^2 = 0,$$

dont les racines deviennent égales pour $z = a$ et pour $z = a'$. Appelons g une des trois valeurs du radical $\sqrt[3]{-aa'^2}$; les trois valeurs de u pour $z = 0$ seront

$$g,\quad ge^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}},\quad ge^{\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}}.$$

Cela posé, prenons pour point de départ de Z l'origine C des coordonnées; puis nommons u_1, u_1, u_3 les trois fonctions de z qui satisfont à l'équation précédente, et qui ont respectivement pour valeurs initiales

$$g,\quad ge^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}},\quad ge^{\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}}.$$

On voit sans peine que ces fonctions u_1, u_2, u_3 formeront un système

circulaire relativement au point A, et que les mêmes fonctions rangées dans l'ordre u_1, u_3, u_2, en formeront un relativement au point A'.

Si, maintenant, on veut savoir ce que devient u_1, après que Z a décrit un contour fermé quelconque, par exemple celui qui a pour caractéristique

$$(-A)(+A')(+A)(+A')(-A)(-A)(-A'),$$

il suffira d'observer qu'après que Z a décrit successivement chacun des contours élémentaires indiqués par la caractéristique, u_1, qui avait d'abord la valeur g, a pris les valeurs

$$ge^{\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}},\ ge^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}},\ ge^{\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}},\ ge^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}},\ g,\ ge^{\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}},\ g;$$

ainsi la fonction u_1 se trouve avoir repris sa valeur primitive.

34. Après avoir montré ce que devient la fonction u_1, lorsque le point Z revient à sa position initiale après avoir décrit un contour fermé quelconque, il nous faut examiner maintenant quelles valeurs acquiert cette fonction, suivant que le point Z va de son point de départ C à un autre point déterminé K, *fig.* 17, par un chemin ou par un autre. Nous excluons toujours les chemins qui passeraient par quelqu'un des points A, A', A'', etc.

Les valeurs initiales des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$, étant toujours désignées par $b_1, b_2, \ldots, b_m$, appelons $h_1, h_2, \ldots, h_m$ les valeurs qu'elles acquièrent, lorsque Z va de C en K par un chemin déterminé CMK; il s'agit de trouver quelles valeurs acquièrent ces mêmes fonctions, lorsque Z va de C en K par un autre chemin quelconque CLK.

Pour cela, observons que les deux chemins CLK, CMK, réunis, composent un contour fermé CLMC, dont la caractéristique, que nous représenterons par (Γ), sera connue dès que ces deux chemins seront donnés. Or la fonction u_i acquerra la même valeur au point K, soit que le point Z y aille par le chemin CLK, soit qu'il y aille en décrivant d'abord le contour fermé CLMC, puis la ligne CMK; car le second chemin se réduit au premier sans franchir aucun des points A, A', A'', etc. Mais on saura, par ce qui précède, quelle est la fonction u_j dont u_i prend la valeur initiale b_j après une révolution de Z

sur le contour fermé CLMC; on en conclura donc que la fonction u_i acquiert au point K la valeur h_j, quand le point Z y arrive par le chemin CLMC + CMK, ou, ce qui est la même chose, par le chemin CLK : c'est la réponse à la question que nous voulions résoudre.

A ce point de vue, le chemin CLK sera suffisamment désigné par la notation $(\Gamma) +$ CMK, dont nous nous servirons par la suite, et que nous appellerons la caractéristique de ce chemin. Quand, par le procédé du n° **16**, on aura déterminé les valeurs $h_1, h_2, \ldots, h_m$ que les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ acquièrent au point K, lorsque Z y va par le chemin CMK, on voit qu'il ne sera pas nécessaire de recommencer ce calcul pour un autre chemin quelconque $(\Gamma) +$ CMK. Il suffira d'avoir effectué le partage des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$, en systèmes circulaires relativement à chacun des points A, A', A'', etc., et alors on pourra assigner immédiatement quelle est celle des quantités $h_1, h_2, \ldots, h_m$, à laquelle la fonction u_i devient égale, lorsque Z a parcouru le chemin $(\Gamma) +$ CMK.

Par exemple, reprenons l'équation

$$u^3 - u + z = 0;$$

les fonctions u_1, u_2, u_3 étant définies comme au n° **32**, appelons h_1, h_2, h_3 les valeurs qu'elles acquièrent, lorsque le point Z va de C en K par un chemin déterminé CMK. Ces quantités une fois calculées, si l'on veut savoir quelles valeurs prennent nos trois fonctions, lorsque Z va de C en K par le chemin $(\pm A)(\pm A') +$ CMK, il suffit d'observer qu'après une révolution de Z sur le contour fermé $(\pm A)(\pm A')$, u_1, u_2, u_3 ont acquis respectivement les valeurs initiales de u_2, u_3, u_1; on en conclut que les valeurs demandées sont h_2, h_3, h_1.

35. On peut rendre plus sensible la marche de la fonction u, en imaginant un point U dont l'abscisse et l'ordonnée soient la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans la valeur de u. En même temps que Z décrit une ligne continue, U en décrit une aussi qui est parfaitement déterminée, si Z ne passe par aucun des points A, A', A'', etc.

Concevons que Z aille de C en K par plusieurs chemins différents : la fonction u pourra acquérir des valeurs différentes, et parmi les valeurs $h_1, h_2, \ldots, h_m$ qu'elle peut avoir pour $z = k$, on a appris

à distinguer celle qu'elle prend, suivant que Z a suivi tel ou tel chemin. Par conséquent, le point U pourra arriver à différentes positions dans ces différents cas, et, parmi les points H_1, $H_2, \ldots$, H_m, qui correspondent aux quantités h_1, $h_2, \ldots$, h_m, on saura distinguer celui avec lequel U vient coïncider, lorsqu'on connaîtra le chemin suivi par Z.

Par exemple, si Z décrit un contour fermé de façon à revenir à son point de départ C, il pourra arriver que la fonction u reprenne ou ne reprenne pas sa valeur initiale : dans le premier cas, le point U aura décrit lui-même un contour fermé; mais, dans le second, il ne sera pas revenu à sa position primitive.

36. Nous avons toujours supposé jusqu'ici que Z ne passait par aucun des points pour lesquels la fonction u devient une racine multiple de l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

Admettons maintenant que Z vienne à passer par un point A, pour lequel les p fonctions u_1, $u_2, \ldots$, u_p acquièrent une même valeur b. Avant que Z arrivât en A, ces fonctions avaient pour valeurs p quantités inégales très-peu différentes de b; lorsqu'ensuite Z a dépassé le point A, l'équation

$$f(u, z) = 0$$

fournit encore p valeurs de u inégales et très-voisines de b; mais il n'y a pas de raison d'attribuer chacune de ces valeurs à l'une plutôt qu'à l'autre des fonctions u_1, $u_2, \ldots$, u_p. Ainsi, au delà du point A, on trouve bien encore p fonctions distinctes de z comme avant; mais la question de savoir laquelle de ces fonctions doit être regardée comme la continuation d'une fonction particulière u_1, reste tout à fait indéterminée.

L'exemple suivant rendra plus sensible ce genre d'indétermination. Faisons décrire à Z, à partir du point C et dans le sens direct, un cercle CLAMC, *fig.* 18, passant par le point A, pour lequel les fonctions u_1 et u_2 deviennent égales entre elles, et supposons que ces fonctions ne puissent devenir égales pour aucun autre point situé sur la circonférence ou dans son intérieur. Soit b leur valeur commune

au point A, de sorte que pour $z = a$, $u = b$, on ait

$$f(u, z) = 0, \quad \frac{df(u, z)}{du} = 0;$$

mais admettons que, pour les mêmes valeurs de z et de u, les dérivées $\frac{d^2 f(u, z)}{du^2}$, $\frac{df(u, z)}{dz}$ se réduisent à des quantités A et B différentes de zéro. Si l'on fait

$$z = a + \rho e^{\tau\sqrt{-1}}, \quad u_1 = b + \beta_1, \quad u_2 = b + \beta_2,$$

les quantités β_1 et β_2 s'annuleront en même temps que ρ, et se confondront sensiblement, pour de petites valeurs de ρ, avec les deux racines de l'équation du second degré

$$A\beta^2 + B\rho e^{\tau\sqrt{-1}} = 0,$$

ou

$$\beta^2 = h\rho e^{\tau\sqrt{-1}},$$

en faisant

$$-\frac{B}{A} = h.$$

On en conclut

$$u_1 = b + (h\rho)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\tau}{2}\sqrt{-1}}, \quad u_2 = b + (h\rho)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\tau + 2\pi}{2}\sqrt{-1}},$$

et si l'on pose

$$(h\rho)^{\frac{1}{2}} = \gamma e^{\delta\sqrt{-1}},$$

γ désignant un nombre positif et δ un angle réel, puis

$$\delta + \frac{\tau}{2} = \nu_1, \quad \delta + \frac{\tau + 2\pi}{2} = \nu_2,$$

on aura approximativement, dans les environs du point A,

$$u_1 = b + \gamma e^{\nu_1\sqrt{-1}}, \quad u_2 = b + \gamma e^{\nu_2\sqrt{-1}}.$$

Prenons maintenant sur la circonférence CLMC deux points L et M très-voisins de A, et situés de part et d'autre de ce point. Soit B le point correspondant à la valeur commune b que prennent les deux fonctions u_1, u_2, quand le point Z arrive en A; lorsque Z est en L, ces mêmes

fonctions ont des valeurs inégales correspondantes à des points N et P voisins de B, et tels, que les directions BN, BP soient sensiblement dans le prolongement l'une de l'autre, attendu qu'on a

$$v_2 = v_1 + \pi.$$

Lorsqu'ensuite le point Z est en M, les points Q et R, correspondants aux valeurs des deux fonctions, sont encore très-voisins du point B, et tels aussi, que les directions BQ, BR soient sensiblement dans le prolongement l'une de l'autre. Mais comme, en passant du point L au point M, on fait varier τ de $\pm\pi$, et qu'ainsi chacun des angles v_1, v_2 varie de $\pm\frac{\pi}{2}$, les directions BQ, BR seront sensiblement perpendiculaires aux directions BN, BP.

Concevons à présent que Z aille de L en M en passant par le point A; les points U_1, U_2, correspondants aux fonctions u_1, u_2, et situés d'abord en N et P, se rapprocheront l'un de l'autre, se confondront en B, lorsque Z arrivera en A, puis se sépareront pour venir en Q et R; mais si l'on attribue le point N à la fonction u_1, et le point P à la fonction u_2, il n'y aura pas de raison d'attribuer chacun des points Q et R à une de ces fonctions plutôt qu'à l'autre.

En effet, déformons infiniment peu le chemin par lequel Z va de L en M, de façon qu'il ne passe plus par le point A; selon que le point A sera en dehors ou en dedans du contour fermé CLMC, il arrivera ou que le point U_1 ira de N en Q, et le point U_2 de P en R, ou que le point U_1 ira de N en R et le point U_2 de P en Q.

Pour le voir, supposons d'abord, *fig.* 19, le point A extérieur au contour CLMC, mais très-voisin de ce contour : prenons sur celui-ci les deux points L et M très-voisins de A, de façon toutefois que les directions AL, AM fassent un angle très-voisin de 180 degrés. Alors, quand le point Z ira de L en M, τ diminuera sensiblement de π, et, par suite, v_1 et v_2 diminueront sensiblement de $\frac{\pi}{2}$: le point U_1 ira donc de N en Q par la ligne NFQ, et le point U_2 de P en R par la ligne PGR.

Si, au contraire, le point A est intérieur, *fig.* 20, les points L et M étant pris comme tout à l'heure, l'angle τ augmentera sensiblement de π, lorsque Z ira de L en M; par suite, v_1 et v_2 augmenteront de $\frac{\pi}{2}$:

U_1 ira donc de N en R par le chemin NFR, tandis que U_2 ira de P en Q par le chemin PGQ.

Les *fig.* 18, 19 et 20 montrent comment se modifient les lignes décrites par les points U_1 et U_2, lorsque le contour CLMC, en se déformant, vient à franchir le point A. Tant qu'il ne le renferme pas, chacun des points U_1, U_2 décrit une ligne fermée, *fig.* 19, l'un la ligne SNFQS, l'autre la ligne TGPRT; ces deux lignes passent très-près du point B et présentent dans cette région comme deux angles droits opposés.

Lorsque le contour CLMC vient à passer au point A, *fig.* 18, ces deux lignes se réunissent en une seule pour laquelle le point B est un point multiple; les branches qui y aboutissent s'y coupent à angles droits. Les points U_1 et U_2 arrivent en B en décrivant les lignes NB, PB; mais ensuite, comme on l'a déjà dit, on peut regarder l'un des deux à volonté comme décrivant la ligne BQ et l'autre comme traçant la ligne BR.

Enfin, lorsque le contour CLMC vient à renfermer le point A, *fig.* 20, les lignes décrites par les points U_1 et U_2 deviennent les deux parties d'un même contour fermé. Ce contour présente un étranglement aux environs du point B, et les parties qui avoisinent cette région forment encore comme deux angles droits opposés. Si S et T sont les positions initiales de U_1 et de U_2, pendant que Z décrira le contour CLMC, le point U_1 tracera l'arc SNFRT, et le point U_2 l'arc TPGQS; ce n'est qu'après deux révolutions de Z que les points U_1 et U_2 reprendraient leurs positions initiales S et T [*].

On verra de même ce qui arrive, lorsque le contour CLMC franchit un point A pour lequel trois fonctions u_1, u_2, u_3 acquièrent une valeur commune b. Si l'on suppose que les dérivées $\frac{d^3 f(u, z)}{du^3}$, $\frac{df(u, z)}{dz}$ ne s'annulent pour $z = a$, $u = b$, les valeurs approchées de ces fonc-

[*] Si le contour CLMC avait un point saillant, que ce point coïncidât avec le point A, et que les deux portions de contour aboutissant en A fissent un angle égal à θ, la ligne décrite par les points U_1, U_2 offrirait encore en B un point multiple; mais l'angle des branches qui se coupent en B, au lieu d'être droit comme dans la *fig.* 18, serait égal à $\frac{\theta}{2}$.

tions pour des valeurs de z voisines de a seront

$$u_1 = b + (h\rho)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\tau}{3}\sqrt{-1}},$$

$$u_2 = b + (h\rho)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\tau+2\pi}{3}\sqrt{-1}},$$

$$u_3 = b + (h\rho)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\tau+4\pi}{3}\sqrt{-1}}.$$

On en conclura, en raisonnant comme on vient de le faire, que si le point A est hors du contour CLMC, mais très-près, chacun des points U_1, U_2, U_3 décrira une courbe fermée, *fig.* 21, passant très-près du point B. Si le contour vient à passer par le point A, ces trois courbes se réunissent en une seule, *fig.* 22, ayant en B un point multiple où passent trois branches qui s'y coupent sous des angles de 60 degrés. Enfin, si le point A devient intérieur au contour, cette ligne unique ne passe plus au point B; mais elle a aux environs de ce point la forme qu'indique la *fig.* 23 : pendant une révolution de Z sur le contour CLMC, chacun des points U_1, U_2, U_3 décrit une portion de la ligne dont il s'agit, de façon que ces trois portions composent la ligne entière; ce n'est qu'après trois révolutions de Z que ces points reviennent à leurs positions initiales.

37. Nous avons supposé, à partir du n° **18**, que le coefficient de la plus haute puissance de u dans le polynôme entier $f(u, z)$ était indépendant de z : mais il est aisé d'étendre la théorie précédente au cas où ce coefficient est une fonction entière quelconque de z. Considérons, en effet, l'équation irréductible

$$\mathrm{N}v^m + \mathrm{P}v^{m-1} + \mathrm{Q}v^{m-2} + \ldots + \mathrm{S}v + \mathrm{T} = 0,$$

où N, P, Q,..., T désignent des polynômes entiers en z, et proposons-nous, comme nous l'avons fait pour la fonction u, de distinguer les diverses valeurs que la fonction v peut acquérir, suivant que le point Z va par tel ou tel chemin de sa position initiale C à une autre position K.

On ramènera sur-le-champ ce cas à celui que nous avons traité, en posant

$$v = \frac{u}{\mathrm{N}}:$$

en effet, l'équation proposée deviendra

$$u^m + Pu^{m-1} + NQu^{m-2} + \ldots + N^{m-2}Su + N^{m-1}T = 0,$$

où le coefficient de u^m est l'unité. Le polynôme N n'ayant qu'une seule valeur pour chaque valeur de z, aux diverses valeurs dont la fonction u est susceptible correspondront autant de valeurs de v qui s'en déduiront par la formule

$$v = \frac{u}{N}.$$

Tout se réduira donc, comme ci-dessus, à déterminer les caractéristiques des divers chemins par lesquels on peut aller de C en K, et, pour les connaître, il n'y aura qu'à construire les points A, A', A'', etc., correspondants aux valeurs de z qui font acquérir des racines multiples à l'équation

$$u^m + Pu^{m-1} + \ldots + N^{m-1}T = 0.$$

Observons qu'il ne serait pas exact de déterminer ces points en cherchant les valeurs de z pour lesquelles l'équation en v acquiert des racines égales : car, bien qu'en général ces valeurs de z soient les mêmes, il peut en être autrement de celles qui annulent N; pour ces valeurs, l'équation en u a $m-1$ racines égales à zéro, tandis que l'équation en v a ordinairement une racine infinie et $m-1$ racines finies et inégales. Mais on trouvera toujours tous les points A, A', A'', etc., en joignant aux valeurs de z qui font acquérir à l'équation en v des racines égales celles qui lui donnent des racines infinies.

38. On a vu que les diverses fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ qui satisfont à l'équation

$$u^m + Pu^{m-1} + NQu^{m-2} + \ldots = 0,$$

se partagent, relativement au point A, en un certain nombre de systèmes circulaires; les fonctions correspondantes

$$v_1 = \frac{u_1}{N},\ v_2 = \frac{u_2}{N}, \ldots,\ v_m = \frac{u_m}{N},$$

formeront évidemment des systèmes circulaires correspondants et en même nombre. Appelons ν la puissance de $z - a$ par laquelle le

polynôme N est divisible, l'exposant entier ν pouvant être zéro, et faisons

$$\mathrm{N} = (z-a)^{\nu} N;$$

nous aurons, en désignant par v_n une des fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_m$,

$$v_n = \frac{u_n}{(z-a)^{\nu} N},$$

d'où

$$(z-a)^{\nu} v_n = \frac{1}{N} \cdot u_n.$$

Or, tant que le point Z reste dans l'intérieur d'un cercle décrit du point A comme centre avec la plus petite des distances AA′, AA″, etc., pour rayon, on peut développer $\frac{1}{N}$ en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de $z-a$; on a vu d'ailleurs, n° **23**, que μ étant le nombre des termes du système circulaire dont u_n fait partie, cette fonction u_n peut, dans les mêmes limites, être développée suivant les puissances entières et positives de $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$. En multipliant ces deux séries, on aura le développement de $\frac{1}{N} \cdot u_n$ suivant les puissances entières et positives de $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$: nous pouvons donc écrire

$$\frac{1}{N} \cdot u_n = (z-a)^{\nu} v_n = \mathrm{A} + \mathrm{B}(z-a)^{\frac{1}{\mu}} + \mathrm{C}(z-a)^{\frac{2}{\mu}} + \ldots,$$

A, B, C, etc., désignant des coefficients indépendants de z, et, par conséquent,

$$v_n = \mathrm{A}(z-a)^{-\nu} + \mathrm{B}(z-a)^{\frac{1}{\mu}-\nu} + \mathrm{C}(z-a)^{\frac{2}{\mu}-\nu} + \ldots.$$

Ainsi la fonction v_n se développe comme u_n, suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$; mais, tandis que le développement de u_n ne contient que des puissances positives de $(z-a)^{\frac{1}{\mu}}$, celui de v_n peut commencer par un nombre limité de puissances négatives.

39. Appliquons ce qui vient d'être dit à l'équation

$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots\, v^m - 1 = 0,$$

où les quantités a, a', a'', etc., sont supposées toutes inégales; si l'on pose

$$v = \frac{u}{(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots},$$

il viendra

$$u^m - (z-a)^{m-1}(z-a')^{m-1}(z-a'')^{m-1}\ldots = 0.$$

Les points A, A′, A″, etc., pour lesquels cette équation acquiert des racines multiples, sont précisément ceux qui répondent aux valeurs a, a', a'', etc., de z.

Appelons u_1, u_2,..., u_m les m fonctions qui satisfont à l'équation en u, et qui ont respectivement pour valeurs initiales

$$g,\quad g e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}},\quad g e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}},\ldots,\quad g e^{-\frac{(2m-2)\pi}{m}\sqrt{-1}},$$

g désignant une des valeurs du radical

$$\sqrt{(c-a)^{m-1}(c-a')^{m-1}(c-a'')^{m-1}\ldots}$$

On déduit facilement des principes établis plus haut, que chacune de ces fonctions acquiert la valeur initiale de la suivante après une révolution de Z sur un quelconque des contours élémentaires (+ A), (+ A′), etc. Si donc on pose

$$v_1 = \frac{u_1}{(z-a)(z-a')\ldots},\quad v_2 = \frac{u_2}{(z-a)(z-a')\ldots},\ldots,$$

il en sera de même des fonctions v_1, v_2, etc.

D'après cela, si l'on appelle h_1, h_2,..., h_m les valeurs que les fonctions v_1, v_2,..., v_m acquièrent au point K, lorsque Z y arrive par le chemin CMK, et si l'on demande les valeurs qu'obtiennent ces mêmes fonctions, lorsque Z arrive en K par le chemin (+ A)(+ A′) + CMK, on trouvera que v_1 prend la valeur h_3, v_2 la valeur h_4, et ainsi de suite jusqu'à v_{m-1} et v_m, qui prenne les valeurs h_1 et h_2. De même, si Z arrivait en K par le chemin (− A) + CMK, v_1, v_2,..., v_m acquerraient respectivement les valeurs h_m, h_1,..., h_{m-1}.

Ajoutons que les fonctions v_1, v_2,..., v_m seront développables en séries convergentes suivant les puissances entières de $(z-a)^{\frac{1}{m}}$, tant que le point Z restera dans l'intérieur d'un cercle décrit du point A comme centre avec la plus petite des distances AA', AA'', etc., pour rayon, et que ces développements renfermeront la puissance négative $(z-a)^{-\frac{1}{m}}$.

40. Nous n'avons parlé, dans tout ce qui précède, que des équations algébriques; mais les propositions que nous avons établies s'appliquent à l'équation transcendante

$$f(u, z) = 0,$$

pourvu que le premier membre $f(u, z)$ et ses dérivées partielles des divers ordres, prises par rapport à u et à z, soient des fonctions continues de u et de z, et n'aient pour chaque système de valeurs de ces variables qu'une seule valeur finie et déterminée. En effet, M. Cauchy a établi (*Nouveaux Exercices de Mathématiques*, tome II, page 109) que les valeurs de u, tirées d'une telle équation, varient d'une manière continue lorsque z varie d'une manière continue. Or c'est là, avec les conditions qu'on vient d'énoncer, la seule chose que suppose notre théorie.

41. On peut encore la généraliser en supposant, non plus

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

mais

$$z = \varphi(x, y) + \psi(x, y)\sqrt{-1};$$

nous désignons ici par $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ deux fonctions continues qui n'ont pour chaque système de valeurs de x et de y, ou, si l'on veut, pour chaque point du plan xy, qu'une valeur réelle finie et déterminée. Pour chaque point du plan, l'équation

$$f(u, z) = 0$$

fournira encore des valeurs de u généralement inégales, et l'on pourra se demander ce que devient chacune d'elles en variant d'une manière

continue, tandis que le point qui a pour coordonnées x et y passe d'une position initiale C à une autre position K.

Dans ce but, on déterminera d'abord les points correspondants aux valeurs de z qui font acquérir des racines infinies ou multiples à l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

Si $f + g\sqrt{-1}$ désigne une pareille valeur, les coordonnées des points correspondants seront fournies par le système des deux équations

$$\varphi(x, y) = f, \quad \psi(x, y) = g.$$

Si maintenant on suppose que le point (x, y) aille de C en K par un chemin déterminé, la valeur que la fonction u acquiert au point K restera la même, lorsqu'on viendra à déformer le chemin parcouru, tant que ce chemin ne franchira aucun point pour lequel la fonction u devienne infinie ou égale à une autre racine de l'équation proposée. La démonstration est exactement la même que celle qui a été donnée plus haut pour le cas de $z = x + y\sqrt{-1}$.

Ensuite, si en un point A un certain nombre des fonctions de z déterminées par l'équation

$$f(u, z) = 0$$

deviennent égales entre elles, on prouvera encore, comme précédemment, que ces fonctions se partagent en un certain nombre de systèmes circulaires, c'est-à-dire que les fonctions qui composent un de ces systèmes étant disposées convenablement sur un cercle, chacune d'elles acquiert la valeur initiale de la suivante après une révolution du point (x, y) sur un contour infiniment petit tracé autour du point A.

Les conséquences tirées ci-dessus de ces principes subsisteront donc dans l'hypothèse plus générale dont nous parlons.

TROISIÈME PARTIE.

42. Appliquons maintenant la théorie qui précède à la recherche des valeurs multiples des intégrales définies. Considérons l'équation algébrique

$$f(u, z) = 0,$$

dont le premier membre est une fonction entière quelconque de u et de z, et, comme au nº **5**, appelons u_1 une fonction de z qui satisfasse à cette équation et se réduise à b_1, lorsque le point Z, correspondant à $z = x + y\sqrt{-1}$, part de sa position initiale C. Comme l'a remarqué M. Cauchy, la notation $\int_c^k u_1\, dz$ n'offre un sens déterminé qu'autant qu'on donne, outre les limites c et k, le chemin CMK par lequel le point mobile Z est supposé aller de C en K. A la vérité, tant que le chemin CMK, en se déformant, ne franchit aucun des points A, A′, A″, etc., pour lesquels l'équation

$$f(u, z) = 0$$

a des racines égales ou infinies, l'intégrale $\int_c^k u_1\, dz$ conserve la même valeur, nº **9**; mais s'il vient à franchir quelques-uns de ces points, l'intégrale pourra changer et acquérir un nombre limité ou illimité de valeurs différentes.

Montrons d'abord comment, à l'aide des principes établis dans la première partie, on pourra calculer avec telle approximation qu'on voudra la valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\, dz$ relative à un chemin donné CMK; nous supposons, bien entendu, que ce chemin ne passe par aucun des points A, A′, A″, etc., sans quoi l'intégrale pourrait être indéterminée. Répétons la construction expliquée an nº **16** et par laquelle la ligne CMK est partagée en un certain nombre de parties CMC′, C′M′C″, C″M″C‴, etc., *fig.* 7 : le long de la ligne CMC′, on a, nº **15**,

$$u_1 = b_1 + F_1(b_1, c).(z - c) + F_2(b_1, c).(z - c)^2 + \ldots,$$

où le second membre est une série convergente; si donc on appelle V l'intégrale $\int_c^k u_1\, dz$ prise le long du chemin CMC′, V s'exprimera par une série convergente qu'on obtiendra en intégrant chaque terme de la précédente entre les limites $z = c$, $z = c'$: on trouvera ainsi

$$V = b_1(c' - c) + F_1(b_1, c).\frac{(c' - c)^2}{2} + F_2(b_1, c).\frac{(c' - c)^3}{2} + \ldots$$

En appelant V', V'', etc., les valeurs des intégrales $\int_{c'}^{c''} u_1\,dz$, $\int_{c''}^{c'''} u_1\,dz$, etc., prises respectivement le long des chemins C'M'C'', C''M''C''', etc., on aura de même

$$V' = b'_1(c''-c') + F_1(b'_1, c')\cdot\frac{(c''-c')^2}{2} + F_2(b'_1, c')\cdot\frac{(c''-c')^3}{3} + \ldots,$$

$$V'' = b''_1(c'''-c'') + F_1(b''_1, c'')\cdot\frac{(c'''-c'')^2}{2} + F_2(b''_1, c'')\cdot\frac{(c'''-c'')^3}{3} + \ldots,$$

etc.

Ces quantités V, V', V'', etc., seront en nombre limité, et en les ajoutant, on aura la valeur demandée de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$: on pourra souvent faciliter ce calcul en profitant de la faculté qu'on a de déformer le chemin CMK, sans toutefois lui faire franchir aucun des points A, A', A'', etc.

La même méthode peut servir à calculer la valeur de l'intégrale $\int u_1\,dz$ prise tout le long d'un contour élémentaire quelconque, du contour (+ A), par exemple, qui se compose de la ligne CD, *fig.* 24, du contour infiniment petit DNPD et de la ligne DC. En effet, du centre A, avec un rayon moindre d'une quantité finie que la plus petite des distances AC, AA', AA'', AA''', etc., décrivons une circonférence EQR qui coupe la ligne CD en E. Nous pourrons, sans changer l'intégrale, substituer au contour élémentaire (+ A) un autre contour formé de la ligne CE, de la circonférence EQRE et de la ligne EC. Comme ce dernier a tous ses points à des distances finies des points A, A', A'', etc., rien n'empêchera de calculer la valeur de l'intégrale $\int u_1\,dz$ relative à ce contour par la méthode qui vient d'être exposée.

43. Soient maintenant u_1, u_2,..., u_m les m fonctions de z déterminées par l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

Appelons A_1, A_{-1}, A'_1, A'_{-1}, etc., les valeurs de l'intégrale $\int u_1\,dz$ prise tout le long de chacun des contours élémentaires (+ A), (− A),

$(+A')$, $(-A')$, etc.; appelons de même A_2, A_{-2}, A'_2, A'_{-2}, etc., les valeurs relatives à ces contours de l'intégrale $\int u_2 dz$, et ainsi de suite, de sorte que généralement $A^{(i)}_{\pm n}$ désigne la valeur de l'intégrale $\int u_n dz$ prise le long du contour élémentaire $(\pm A^{(i)})$. Ces quantités, que nous nommerons *intégrales élémentaires*, et qu'on pourra calculer comme il a été dit au numéro précédent, étant regardées comme connues, proposons-nous d'avoir l'expression de l'intégrale $\int u_1 dz$ prise à partir du point C le long d'une ligne fermée quelconque CLMC, *fig.* 4.

Soit, pour fixer les idées,

$$(+A)(-A')(+A'')(-A)$$

la caractéristique de cette ligne : il suit du n° **10** que l'intégrale $\int u_1 dz$ restera la même, si au contour CLMC on substitue la série des contours élémentaires $(+A)$, $(-A')$, $(+A'')$, $(-A)$. D'un autre côté, les fonctions u_1, u_2,..., u_m étant partagées relativement aux différents points A, A', A'', etc., en systèmes circulaires, on saura quelle est la fonction dont u_1 acquiert la valeur initiale après une révolution de Z sur le contour $(+A)$; supposons que ce soit u_3 : on saura de même qu'après une révolution de Z sur $(-A')$, u_3 acquiert la valeur initiale de u_4, par exemple : enfin, admettons que u_4 acquière la valeur initiale de u_2 après une révolution de Z sur $(+A'')$. Cela posé, la partie relative au contour $(+A)$ de l'intégrale demandée sera A_1; la partie relative au contour $(-A')$ sera A'_{-3}, et les parties relatives aux contours $(+A'')$ et $(-A)$ seront respectivement A''_4 et A_{-2}. L'intégrale $\int u_1 dz$ prise le long de la ligne fermée CLMC sera donc

$$A_1 + A'_{-3} + A''_4 + A_{-2}.$$

En général, on voit que la valeur de cette intégrale, prise le long d'un contour fermé passant par le point C, s'exprimera toujours par la somme d'un certain nombre des intégrales élémentaires A_1, A_{-1}, A'_1,..., A_2, etc.

44. Cette première question résolue, cherchons à présent les valeurs de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ pour les divers chemins par lesquels on peut aller de C en K. Soit CMK, *fig.* 17, un premier chemin tracé à volonté entre ces deux points : appelons v_1, v_2,..., v_m les valeurs des intégrales $\int_c^k u_1\,dz$, $\int_c^k u_2\,dz$,..., $\int_c^k u_m\,dz$ prises le long de cette ligne, et proposons-nous de trouver la valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ relativement à un autre chemin quelconque CLK.

Soit, pour fixer les idées,

$$(+\text{A})(-\text{A}')(+\text{A}'')(-\text{A}) + \text{CMK}$$

la caractéristique de ce chemin : conservons les hypothèses du numéro précédent, et supposons de plus qu'après une révolution de Z sur $(-\text{A})$, u_2 acquière, par exemple, la valeur initiale de u_5. On pourra, n° 9, substituer à la ligne CLK la série des chemins représentés par les différents termes de la caractéristique : alors on trouvera immédiatement pour l'intégrale demandée l'expression

$$\text{A}_1 + \text{A}'_{-3} + \text{A}''_4 + \text{A}_{-2} + v_5.$$

On voit par là que les valeurs autres que v_1 de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ s'obtiendront en ajoutant à l'une des quantités v_1, v_2,..., v_m une ou plusieurs des intégrales élémentaires A_1, A_{-1}, A'_1,..., A_2, etc., la même intégrale élémentaire pouvant être répétée plusieurs fois dans cette somme. Observons toutefois qu'on n'aurait pas, en général, une valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ en ajoutant à une des quantités v_1, v_2,..., v_m les produits d'un certain nombre des quantités A_1, A_{-1}, A'_1,..., A_2, etc., par des nombres entiers pris au hasard.

45. Les intégrales élémentaires A_1, A_{-1}, etc., jouissent de quelques propriétés qu'il est bon de remarquer. Soit u_j la fonction dont u_1 acquiert la valeur initiale après une révolution de Z sur le contour élémentaire $(+\text{A})$; réciproquement, u_j acquerra la valeur initiale de

u_i après une révolution de Z sur le contour $(-A)$. Les intégrales désignées par A_i et A_{-j} ont donc leurs éléments deux à deux égaux et de signes contraires, et, par conséquent, on a

$$A_{-j} = -A_i;$$

ainsi chacune des intégrales $A_{-1}, A_{-2}, \ldots, A_{-m}$, relatives au contour $(-A)$, est égale et de signe contraire à quelqu'une des intégrales A_1, $A_2, \ldots, A_m$, relatives au contour $(+A)$, et *vice versâ*.

46. Supposons en particulier que la fonction u_i reprenne sa valeur initiale après une révolution de Z sur le contour $(+A)$; il en sera de même sur le contour $(-A)$, et l'équation précédente deviendra

$$A_{-i} = -A_i.$$

Dans ce cas, il suit du n° **11** que la quantité A_i est indépendante de la position initiale C du point mobile Z, c'est-à-dire qu'elle reste la même si l'on déplace le point C, et qu'en même temps le contour élémentaire (A) se déforme sans franchir aucun des points A, A′, A″, etc. On peut donc regarder A_i comme la valeur de l'intégrale $\int u_i dz$ prise le long d'un contour infiniment petit tracé autour du point A, par où l'on voit que si la fonction u_i conserve une valeur finie au point A, l'intégrale A_i se réduit à zéro.

En effet, prenons pour le contour infiniment petit dont il vient d'être question, une circonférence décrite du point A comme centre avec le rayon très-petit ρ. Pour un point de cette circonférence, on aura

$$z = a + \rho e^{\tau\sqrt{-1}},$$

τ désignant un angle réel; d'où

$$dz = \sqrt{-1}\,\rho e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau,$$

et, par suite,

$$A_i = \sqrt{-1}\,\rho \int_0^{2\pi} u_i e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau.$$

Mais u_i conservant une valeur finie pour de très-petites valeurs de ρ, il en est de même de l'intégrale $\int_0^{2\pi} u_i e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau$: l'expression de A_i

se réduit donc à zéro en même temps que ρ; et comme l'intégrale A_i est indépendante de ρ, on en conclut

$$A_i = 0.$$

47. Il y a un cas remarquable dans lequel on peut trouver entre les intégrales élémentaires des relations dont nous tirerons parti dans la suite. C'est celui où, après une révolution de Z sur un contour Δ passant par le point C et renfermant tous les points A, A', A'', etc., dans son intérieur, quelques-unes des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ reprennent leurs valeurs initiales.

Soit u_i une des fonctions qui remplissent cette condition : la caractéristique (Δ) du contour Δ parcouru dans le sens direct se composera des termes $(+A)$, $(+A')$, $(+A'')$, etc., rangés dans un certain ordre, chacun de ces termes s'y trouvant une fois et pas davantage. Il est permis de supposer les points A, A', A'', etc., nommés dans un ordre tel, qu'on ait précisément

$$(\Delta) = (+A)(+A')(+A'')\ldots;$$

admettons ensuite qu'après que Z a parcouru les lignes fermés qui ont pour caractéristiques $(+A)$, $(+A)$, $(+A')$, $(+A)$, $(+A')$, $(+A'')$, etc., la fonction u_i ait acquis respectivement les valeurs initiales de $u_{i'}$, $u_{i''}$, $u_{i'''}$, etc. La valeur de l'intégrale $\int u_i\,dz$, prise le long du contour Δ, sera

$$A_i + A'_{i'} + A''_{i''} + A'''_{i'''} + \ldots.$$

De l'origine O des coordonnées, décrivons maintenant une circonférence Θ, dont le rayon R soit plus grand que la plus grande des distances OA, OA', OA'', etc. Il est clair qu'on peut déformer le contour Δ de manière à le faire coïncider avec cette circonférence sans lui faire franchir aucun des points A, A', A'', etc. La valeur de l'intégrale $\int u_i\,dz$, prise le long de la circonférence Θ, est donc encore égale à la somme

$$A_i + A'_{i'} + A''_{i''} + A'''_{i'''} + \ldots$$

Mais nous pouvons en trouver une autre expression : en effet, po-

sons $z = \frac{1}{z'}$, z' désignant une nouvelle variable, et concevons un point mobile Z′ dont les coordonnées, rapportées à deux nouveaux axes $O'x'$, $O'y'$, soient la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans z'. Les fonctions de z désignées par $u_1, u_2, \ldots, u_m$, deviendront alors des fonctions de z', qui satisferont à l'équation algébrique

$$f\left(u, \frac{1}{z'}\right) = 0;$$

et comme au delà de la circonférence Θ il n'y a pas, à une distance finie de l'origine O, de position du point Z pour laquelle l'équation

$$f(u, z) = 0$$

ait des racines égales ou infinies, de même en dedans du cercle Θ′, dont le centre est O′ et dont le rayon est $\frac{1}{R}$, il n'y aura pas de position du point Z′ autre que l'origine O′, pour laquelle l'équation

$$f\left(u, \frac{1}{z'}\right) = 0$$

ait des racines égales ou infinies. D'ailleurs la fonction u_i reprend, par hypothèse, sa valeur initiale après une révolution de Z sur la circonférence Θ; par conséquent, elle reprendra aussi sa valeur initiale après une révolution de Z′ sur la circonférence Θ′. Le système circulaire dont u_i fait partie relativement au point O′, ne se compose donc que du seul terme u_i, et, par suite, dans l'intérieur du cercle Θ′, cette fonction est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et croissantes de z', cette série pouvant commencer par un nombre limité de puissances négatives, n° 38. On aura donc, pour un module de z' égal ou inférieur à $\frac{1}{R}$,

$$u_i = \alpha_i z'^{-f} + \beta_i z'^{-f+1} + \ldots + \varkappa_i + \lambda_i z' + \mu_i z'^2 + \ldots,$$

f désignant un nombre entier et positif, et $\alpha_i, \beta_i, \ldots, \varkappa_i, \lambda_i, \mu_i$, etc., des coefficients indépendants de z' : on en conclut que, pour un module de z égal ou supérieur à R, on a

$$u_i = \alpha_i z^f + \beta_i z^{f-1} + \ldots + \varkappa_i + \frac{\lambda_i}{z} + \frac{\mu_i}{z^2} + \ldots.$$

Si maintenant on veut avoir l'intégrale $\int u_i dz$ prise le long du cercle Θ, il suffit de faire

$$z = \mathrm{R}e^{\tau\sqrt{-1}},$$

d'où

$$dz = \sqrt{-1}\,\mathrm{R}e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau,$$

et, par conséquent,

$$\int u_i dz = \sqrt{-1}\left\{\begin{aligned} &\alpha_i \mathrm{R}^{f-1}\int_0^{2\pi} e^{(f+1)\tau\sqrt{-1}}\,d\tau \\ &+ \beta_i \mathrm{R}^{f}\int_0^{2\pi} e^{f\tau\sqrt{-1}}\,d\tau + \ldots \\ &+ \varkappa_i \mathrm{R}\int_0^{2\pi} e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau + \lambda_i\int_0^{2\pi} d\tau \\ &+ \frac{\mu_i}{\mathrm{R}}\int_0^{2\pi} e^{-\tau\sqrt{-1}}\,d\tau + \ldots \end{aligned}\right\} = 2\pi\lambda_i\sqrt{-1}.$$

Nous avons donc l'équation

$$\mathrm{A}_i + \mathrm{A}'_{i'} + \mathrm{A}''_{i''} + \mathrm{A}'''_{i'''} + \ldots = 2\pi\lambda_i\sqrt{-1},$$

où λ_i désigne le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de u_i suivant les puissances descendantes de z, et nous aurons une équation semblable pour chaque fonction u_i qui reprend sa valeur initiale après une révolution de Z sur le contour fermé Δ qui renferme dans son intérieur tous les points A, A', A'', etc.

48. Nous avons dit plus haut, nº **44**, qu'on n'aurait pas, en général, une valeur de $\int_c^k u_1\,dz$ en ajoutant à une des quantités ν_1, $\nu_2,\ldots,\nu_m$ des multiples entiers pris au hasard des intégrales élémentaires. Mais il existe certains groupes de ces intégrales qui jouissent d'une propriété remarquable : c'est que la somme des intégrales élémentaires composant un de ces groupes, somme qui est indépendante de c, peut être ajoutée ou retranchée autant de fois qu'on voudra à une valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$, sans qu'on cesse d'avoir une valeur de la même intégrale.

En effet, soit w la valeur de $\int_c^k u_1\,dz$ prise le long du chemin $(\Gamma) + \mathrm{CMK}$, en désignant par (Γ) la caractéristique d'un contour fermé passant par le point C. Séparons d'une manière quelconque les termes de (Γ) en deux groupes (Γ') et (Γ'') [l'un de ces groupes pouvant être (o)], de sorte que la caractéristique $(\Gamma) + \mathrm{CMK}$ puisse se mettre sous la forme $(\Gamma')(\Gamma'') + \mathrm{CMK}$. Soit maintenant u_n la fonction dont u_1 acquiert la valeur initiale après une révolution du point Z sur le contour fermé (Γ'); on pourra tracer de plusieurs manières un contour fermé passant par le point C tel, qu'après une révolution de Z sur ce contour, la fonction u_n reprenne sa valeur initiale. Appelons (Φ) et $(-\Phi)$ les caractéristiques d'un pareil contour, selon qu'il est supposé parcouru dans un sens ou dans le sens contraire. Soit, de plus, p la valeur de l'intégrale $\int u_n\,dz$ prise le long du contour (Φ); cette quantité p pourra s'exprimer, n° **45**, par la somme d'un certain nombre d'intégrales élémentaires, et il suit du n° **12** qu'elle est indépendante de la position du point C.

Cela posé, il est clair que l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ prise le long des chemins

$$\begin{array}{l} (\Gamma')(\Phi)(\Gamma'') + \mathrm{CMK}, \\ (\Gamma')(\Phi)(\Phi)(\Gamma'') + \mathrm{CMK}, \\ (\Gamma')(\Phi)(\Phi)(\Phi)(\Gamma'') + \mathrm{CMK}, \quad \text{etc.}, \\ (\Gamma')(-\Phi)(\Gamma'') + \mathrm{CMK}, \\ (\Gamma')(-\Phi)(-\Phi)(\Gamma'') + \mathrm{CMK}, \quad \text{etc.}, \end{array}$$

aura respectivement pour valeurs

$$\begin{array}{llll} p + w, & 2p + w, & 3p + w, & \text{etc.}, \\ -p + w, & -2p + w, & \text{etc.} & \end{array}$$

On voit donc que si à la valeur w de $\int_c^k u_1\,dz$ on ajoute un multiple entier quelconque de p, on aura encore une valeur de la même intégrale : nous dirons pour cette raison que p est une *période* de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$.

Voici maintenant quelques-unes des questions qui se présentent :

1°. Trouver toutes les périodes *distinctes* qui appartiennent à une valeur de $\int_c^k u_1\,dz$: nous entendons que des périodes sont distinctes, quand aucune ne peut s'obtenir en ajoutant des multiples entiers des autres; ainsi $2p$ ne sera pas une période distincte de p, ni $p+q$ une période distincte de p et de q.

2°. Reconnaître si chaque période p appartient à toutes les valeurs de l'intégale $\int_c^k u_1\,dz$ ou seulement à une partie d'entre elles.

3°. Déterminer les valeurs de $\int_c^k u_1\,dz$ qui restent distinctes lorsqu'on fait abstraction des multiples entiers des périodes.

La solution de ces questions dans plusieurs cas étendus fait l'objet de la suite de ce Mémoire.

49. Le cas le plus simple est celui où la fonction u est rationnelle; alors l'équation

$$f(u, z) = 0$$

est du premier degré, et, par conséquent, ne peut avoir de racines égales; mais la valeur de u peut devenir infinie pour un certain nombre de valeurs de z. Soient a, a', a'', etc., ces valeurs, et A, A′, A″, etc., les points correspondants; il sera toujours possible de mettre u sous la forme

$$\frac{E}{z-a}+\frac{E_1}{(z-a)^2}+\frac{E_2}{(z-a)^3}+\ldots+\frac{E_{m-1}}{(z-a)^m}$$
$$+\frac{E'}{z-a'}+\frac{E'_1}{(z-a')^2}+\ldots+\frac{E'_{m'-1}}{(z-a')^{m'}}$$
$$+\frac{E''}{z-a''}+\frac{E''_1}{(z-a'')^2}+\ldots+\frac{E''_{m''-1}}{(z-a'')^{m''}}+\ldots+\varpi(z),$$

E, E_1, E_2,..., E'_1, E'_2, etc., désignant des constantes, et $\varpi(z)$ une fonction entière de z.

Les intégrales élémentaires relatives aux contours $(+A)$, $(-A)$, $(+A')$, $(-A')$, $(+A'')$, $(-A'')$, etc., seront ici indépendantes de la

position du point C, et auront respectivement pour valeurs

$$+2\pi E\sqrt{-1},\quad -2\pi E\sqrt{-1},\quad +2\pi E'\sqrt{-1},$$
$$-2\pi E'\sqrt{-1},\quad +2\pi E''\sqrt{-1},\quad -2\pi E''\sqrt{-1},\ldots$$

Si donc on appelle v la valeur de l'intégrale $\int_c^k udz$ relative à un chemin déterminé CMK, toutes les valeurs de cette intégrale seront données par la formule

$$v+2\pi\sqrt{-1}\,(nE+n'E'+n''E''+\ldots),$$

n, n', n'', etc., désignant des nombres entiers quelconques positifs, négatifs ou nuls.

Les périodes $2\pi E\sqrt{-1}$, $2\pi E'\sqrt{-1}$, $2\pi E''\sqrt{-1}$, etc., seront généralement distinctes et en même nombre que les valeurs de z qui rendent la fonction u infinie; mais il n'en serait plus de même si un ou plusieurs des nombres E, E', E'', etc., pouvaient s'obtenir en ajoutant des multiples entiers des autres. D'ailleurs les valeurs de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ seront toujours en nombre infini, à moins que les nombres E, E', E'', etc., ne soient tous nuls, auquel cas l'intégrale n'aurait que la valeur v.

Ce qu'on vient de dire de la fonction rationnelle u s'appliquerait également à toute fonction transcendante susceptible d'être mise sous la forme

$$\frac{E}{z-a}+\frac{E_1}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{E_{m-1}}{(z-a)^m}+\frac{E'}{z-a'}+\ldots+\frac{E'_{m-1}}{(z-a')^{m'}}+\ldots+\varpi(z),$$

$\varpi(z)$ désignant une fonction qui n'a qu'une seule valeur et qui reste finie et continue pour toute valeur finie de z. Les constantes E, E', etc., sont ce que M. Cauchy appelle les résidus de la fonction u relatifs aux valeurs a, a', etc., de z, et les périodes qu'on trouve dans ce cas pour l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ sont bien celles qui ont été indiquées par cet illustre géomètre. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, année 1846.)

Cherchons en particulier les périodes de l'intégrale $\int_0^k \frac{dz}{1+z^2}$: les quantités E, E', etc., sont ici au nombre de deux et ont pour valeurs $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$, d'où résultent, pour l'intégrale, les deux périodes $+\pi$ et $-\pi$; comme elles sont égales et de signes contraires, ces deux périodes se réduisent à une seule $+\pi$. On sait, en effet, que les valeurs de l'intégrale $\int_0^k \frac{dz}{1+z^2}$ sont les différents arcs qui ont k pour tangente, et que ces arcs sont tous compris dans la formule $v+n\pi$, v désignant l'un d'entre eux.

50. Lorsque l'équation

$$f(u, z) = 0$$

est du second degré en u, les deux valeurs de u peuvent être mises sous la forme

$$u = \frac{P}{Q} \pm \frac{R}{S}\sqrt{\frac{T}{U}},$$

P, Q, R, S, T, U désignant des polynômes entiers. Supposons, ce qui est permis, que T et U n'aient pas de facteurs multiples, que R soit premier avec S et U, que T le soit aussi, et, enfin, que P et Q soient premiers entre eux; les valeurs de z qui annuleront un des polynômes Q, R, S, T, U, seront celles qui feront acquérir à l'équation

$$f(u, z) = 0$$

des racines égales ou infinies.

Appelons A, A', A'', etc., les points correspondants aux valeurs de z qui annulent T ou U, et A, A', A'', etc., les points correspondants aux valeurs de z qui annulent un des polynômes Q, R, S, sans annuler T ni U. Désignons par ($\pm$ A), ($\pm$ A'), etc., les contours élémentaires qui renferment les points A, A', etc., et par ($\pm A$), ($\pm A'$), etc., ceux qui renferment les points A, A', etc. Enfin, nommons $\mathrm{A}_{\pm 1}$, $\mathrm{A}_{\pm 2}$, $\mathrm{A}'_{\pm 1}$, $\mathrm{A}'_{\pm 2}$, etc., les intégrales élémentaires relatives aux contours ($\pm$ A), ($\pm$ A'), etc., et $A_{\pm 1}$, $A_{\pm 2}$, $A'_{\pm 1}$, $A'_{\pm 2}$, etc., les intégrales élémentaires relatives aux contours ($\pm A$) ($\pm A'$), etc.

On voit sans peine que, relativement à chacun des points A, A',

A'', etc., les deux fonctions u_1 et u_2 forment un système circulaire; si donc $A^{(i)}$ désigne un quelconque de ces points, on aura, nº **45**,

$$A^{(i)}_{-1} = - A^{(i)}_{2}, \quad A^{(i)}_{-2} = - A^{(i)}_{1}.$$

Mais si l'on appelle $\mathcal{A}^{(i)}$ un des points $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}'''$, etc., comme, après une révolution de Z sur un contour infiniment petit tracé autour de $\mathcal{A}^{(i)}$, chacune des fonctions u_1, u_2 reprend sa propre valeur initiale, on aura, nº **46**,

$$\mathcal{A}^{(i)}_{-1} = - \mathcal{A}^{(i)}_{1}, \quad \mathcal{A}^{(i)}_{-2} = - \mathcal{A}^{(i)}_{2}.$$

En regardant ces intégrales élémentaires comme connues, ainsi que les valeurs v_1, v_2 des intégrales $\int_c^k u_1\,dz$, $\int_c^k u_2\,dz$ prises le long d'un chemin déterminé CMK, nous saurons trouver la valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ prise le long d'un autre chemin quelconque CLK, dont la caractéristique sera donnée. Proposons-nous maintenant de former des expressions générales qui comprennent les valeurs de $\int_c^k u_1\,dz$ relatives à tous les chemins CLK par lesquels on peut aller de C en K.

Appelons (Λ) la caractéristique du chemin CLK; soit $[\pm \mathcal{A}^{(i)}]$ un terme de cette caractéristique et n le nombre des termes qui le précèdent. Lorsque le point Z aura parcouru les contours élémentaires représentés par les n premiers termes de (Λ), la fonction u_1 aura repris sa valeur initiale, ou bien aura acquis la valeur initiale de u_2. Dans le premier cas, la portion de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$, qui est prise le long du contour élémentaire $[\pm \mathcal{A}^{(i)}]$, sera $\mathcal{A}^{(i)}_{\pm 1}$; dans le second cas, cette portion sera $\mathcal{A}^{(i)}_{\pm 2}$. D'ailleurs la fonction u_1 reprendra, après que Z aura parcouru ce $n+1^{ième}$ contour élémentaire, la valeur qu'elle avait après les n premiers. On peut donc supprimer, dans la caractéristique (Λ), tous les termes de la forme $[\pm \mathcal{A}^{(i)}]$, et se borner à calculer la valeur de $\int_c^k u_1\,dz$ pour le chemin représenté par la caractéristique ainsi simplifiée, pourvu qu'on ajoute à cette valeur une quantité de la

forme

$$F = l_1 A_1 + l'_1 A'_1 + l''_1 A''_1 + \ldots$$
$$+ l_{-1} A_{-1} + l'_{-1} A'_{-1} + l''_{-1} A''_{-1} + \ldots$$
$$+ l_2 A_2 + l'_2 A'_2 + \ldots + l_{-2} A_{-2} + l'_{-2} A'_{-2} + \ldots ;$$

$l_1, l'_1, l''_1, \ldots, l_{-1}, l'_{-1}, \ldots, l_2, l'_2$, etc., désignant des nombres entiers positifs, nuls, et même, si l'on veut, négatifs, puisqu'on a

$$l^{(i)}_{-1} A^{(i)}_{-1} = - l^{(i)}_{-1} A^{(i)}_{1}, \quad l^{(i)}_{-2} A^{(i)}_{-2} = - l^{(i)}_{-2} A^{(i)}_{2} \ldots$$

Il est clair d'ailleurs qu'en disposant convenablement du chemin CLK, on fera acquérir à ces nombres telles valeurs entières qu'on voudra; il suffira, pour cela, d'introduire dans la caractéristique (Λ) des termes de la forme $[\pm A^{(i)}]$.

Cette caractéristique étant débarrassée des termes de la forme $[\pm A^{(i)}]$, n'en contiendra plus que de la forme $[\pm \mathrm{A}^{(i)}]$, outre le dernier qui est + CMK. Soit

$$(\Lambda') = [\pm \mathrm{A}^{(e)}][\pm \mathrm{A}^{(f)}][\pm \mathrm{A}^{(g)}][\pm \mathrm{A}^{(h)}] \ldots [\pm \mathrm{A}^{(i)}] + \mathrm{CMK}$$

la caractéristique ainsi modifiée : à mesure que Z achèvera de décrire chacun des contours élémentaires qui la composent, il arrivera alternativement ou que la fonction u_1 acquerra la valeur initiale de u_2, ou qu'elle reprendra sa propre valeur initiale. Si donc le nombre des contours élémentaires qui entrent dans (Λ') est pair, la valeur de $\int_c^k u_1\, dz$, prise le long du chemin (Λ'), sera

$$\mathrm{V}_1 = \mathrm{A}^{(e)}_{\pm 1} + \mathrm{A}^{(f)}_{\pm 2} + \mathrm{A}^{(g)}_{\pm 1} + \mathrm{A}^{(h)}_{\pm 2} + \ldots + \mathrm{A}^{(i)}_{\pm 2} + v_1,$$

et si le nombre dont on vient de parler est impair, la valeur de l'intégrale sera

$$\mathrm{V}_2 = \mathrm{A}^{(e)}_{\pm 1} + \mathrm{A}^{(f)}_{\pm 2} + \mathrm{A}^{(g)}_{\pm 1} + \mathrm{A}^{(h)}_{\pm 2} + \ldots + \mathrm{A}^{(i)}_{\pm 1} + v_2.$$

Appelons $\mathrm{B}, \mathrm{B}_{,}, \mathrm{B}_{,,}, \mathrm{B}_{,,,}$, etc., tous les résultats qu'on obtient en ajoutant une des quantités $\mathrm{A}_{\pm 2}, \mathrm{A}'_{\pm 2}, \mathrm{A}''_{\pm 2}$, etc., à l'une des quantités $\mathrm{A}_{\pm 1}$, $\mathrm{A}'_{\pm 1}, \mathrm{A}''_{\pm 1}$, etc.; chacune des expressions $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2$ sera, sauf son dernier ou ses deux derniers termes, la somme d'un certain nombre des

quantités B, $B_{,}$, $B_{,,}$, $B_{,,,}$, etc., la même pouvant être répétée plusieurs fois. Ainsi on aura

$$V_1 = mB + m_{,}B_{,} + m_{,,}B_{,,} + \ldots + v_1,$$
$$V_2 = mB + m_{,}B_{,} + m_{,,}B_{,,} + \ldots + A^{(i)}_{\pm 1} + v_2,$$

$m, m_{,}, m_{,,}$, etc., désignant des nombres entiers quelconques, lesquels peuvent être positifs, nuls, ou même négatifs, puisque les quantités B, $B_{,}$, $B_{,,}$ sont deux à deux égales et de signes contraires. Observons qu'on a

$$A_1 + A_{-2} = 0,$$

et, par conséquent,

$$A^{(i)}_{\pm 1} = A^{(i)}_{\pm 1} + A_{-2} + A_1,$$

où la somme $A^{(i)}_{\pm 1} + A_{-2}$ est une des quantités B, $B_{,}$, $B_{,,}$, etc. : l'intégrale désignée par V_2 peut donc aussi se mettre sous la forme

$$V_2 = mB + m_{,}B_{,} + m_{,,}B_{,,} + \ldots + A_1 + v_2.$$

Pour avoir maintenant la valeur de $\int_c^k u_1\,dz$ relativement à un chemin quelconque CLK, il suffira d'ajouter la quantité F à l'une des quantités V_1, V_2. Il en résulte que toutes les valeurs de l'intégrale définie $\int_c^k u_1\,dz$ sont comprises dans les deux formules

$$G + v_1, \quad G + A_1 + v_2,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} G = {} & l_1 A_1 + l'_1 A'_1 + l''_1 A''_1 + \ldots + l_{-1} A_{-1} + l'_{-1} A'_{-1} + l''_{-1} A''_{-1} + \ldots \\ & + l_2 A_2 + l'_2 A'_2 + \ldots + l_{-2} A_{-2} + l'_{-2} A'_{-2} + \ldots \\ & + mB + m_{,}B_{,} + m_{,,}B_{,,} + \ldots, \end{aligned}$$

les lettres $l_1, l'_1, \ldots, l_{-1}, l'_{-1}, \ldots, l_2, \ldots, l_{-2}, \ldots, m, m_{,}, m_{,,}$, etc., désignant, comme on l'a déjà dit, des nombres entiers positifs, nuls ou négatifs et absolument quelconques. En d'autres termes, toutes les valeurs de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ peuvent s'obtenir en ajoutant aux deux

valeurs v_1 et $A_1 + v_2$ des multiples entiers quelconques des quantités

$$\begin{array}{l} A_1, \quad A'_1, \quad A''_1,\ldots, \quad A_{-1}, \quad A'_{-1}, \quad A''_{-1},\ldots \\ A_2, \quad A'_2,\ldots, \quad A_{-2}, \quad A'_{-2},\ldots, \\ \mathrm{B}, \quad \mathrm{B}_{,}, \quad \mathrm{B}_{,,}, \quad \text{etc.} \end{array}$$

Ces quantités sont donc autant de périodes de l'intégrale $\int_c^k u_1\, dz$, et toute autre période de la même intégrale est nécessairement composée de celles-là; mais elles ne sont pas toutes distinctes, et, en ayant égard aux équations établies ci-dessus,

$$A_{-1}^{(i)} = -A_1^{(i)}, \quad A_{-2}^{(i)} = -A_2^{(i)}, \quad \mathrm{A}_{-1}^{(i)} = -\mathrm{A}_2^{(i)}, \quad \mathrm{A}_{-2}^{(i)} = -\mathrm{A}_1^{(i)},$$

on reconnaîtra sans peine qu'elles peuvent être réduites aux suivantes :

$$\begin{array}{l} A_1, \quad A'_1, \quad A''_1,\ldots, \quad A_2, \quad A'_2, \quad A''_2,\ldots, \\ \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2, \quad \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}'_2, \quad \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}''_2, \quad \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}'''_2,\ldots, \\ \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}'_1, \quad \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}''_1, \quad \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}'''_1,\ldots, \\ \mathrm{A}'_1 + \mathrm{A}'_2, \quad \mathrm{A}'_1 + \mathrm{A}''_2, \quad \mathrm{A}'_1 + \mathrm{A}'''_2,\ldots, \\ \mathrm{A}'_2 + \mathrm{A}''_1, \quad \mathrm{A}'_2 + \mathrm{A}'''_1,\ldots, \\ \mathrm{A}''_1 + \mathrm{A}''_2, \quad \mathrm{A}''_1 + \mathrm{A}'''_2,\ldots, \\ \mathrm{A}''_2 + \mathrm{A}'''_1,\ldots, \\ \text{etc.} \end{array}$$

Ces dernières périodes seront distinctes en général; mais, dans des cas particuliers, elles pourront se réduire à un nombre beaucoup moindre.

Il suit de la remarque faite au n° **46**, qu'une période telle que A_1 ou A_2 est indépendante des limites c et k et peut être regardée comme la valeur de l'intégrale $\int u_1\, dz$ ou $\int u_2\, dz$ prise tout le long d'un contour fermé infiniment petit qui renferme le point A. Une période telle que $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$ exprime la valeur de l'intégrale $\int (u_1 + u_2)\, dz$ prise tout le long du contour élémentaire $(+\mathrm{A})$; mais, comme la fonction $u_1 + u_2$ reprend sa valeur initiale après une révolution de Z sur ce contour, l'intégrale dont il s'agit est indépendante de la position

du point C, n° 11, et peut être considérée comme prise tout le long d'un contour infiniment petit qui entoure le point A. Enfin, une période telle que $A_1 + A'_2$ est égale à la valeur de l'intégrale $\int u_1\, dz$ prise le long du contour fermé qui a pour caractéristique $(+A)(+A')$; comme après une révolution de Z sur ce contour la fonction u_1 reprend sa valeur initiale, l'intégrale ou, ce qui est la même chose, la période $A_1 + A'_2$ sera indépendante de la position du point C et pourra être considérée comme prise tout le long d'un contour fermé assujetti seulement à renfermer les points A et A', avec cette condition toutefois qu'il puisse se réduire au contour $(+A)(+A')$ sans franchir aucun des points A, A', A'', etc., *A*, *A'*, *A''*, etc. On voit donc que toutes les périodes dont le tableau a été donné ci-dessus seront bien indépendantes des limites c et k de l'intégrale $\int_c^k u_1\, dz$.

Nous venons de dire que la période $A_1 + A'_2$ était égale à la valeur de l'intégrale $\int u_1\, dz$ prise le long d'un contour fermé qui entoure les deux points A et A'. Soit ADHD'A', *fig.* 25, une ligne tracée entre ces points et avec laquelle le contour dont il s'agit puisse se confondre sensiblement sans franchir aucun des points A, A', A'', etc., de sorte que ce contour puisse être regardé comme formé de la ligne DHD', du contour fermé infiniment petit D'E'F'D', de la ligne D'HD, et enfin du contour infiniment petit DEFD. On voit aisément qu'il y a un cas fort étendu où les portions de l'intégrale $\int u_1\, dz$ relatives aux contours infiniment petits DEFD, D'E'F'D' tendent vers zéro, à mesure que les dimensions de ces contours diminuent elles-mêmes jusqu'à zéro; ce cas est celui où la limite du produit $(z-a)u_1$, pour $z=a$, et la limite du produit $(z-a')u_1$, pour $z=a'$, sont nulles l'une et l'autre. En effet, pour des valeurs très-petites du module de $z-a$, la fonction u_1 est développable suivant les puissances entières négatives et positives de $(z-a)^{\frac{1}{2}}$: si donc le produit $(z-a)u_1$ se réduit à zéro pour $z=a$, le développement de u_1 doit être de la forme

$$u_1 = A(z-a)^{-\frac{1}{2}} + B + C(z-a)^{\frac{1}{2}} + D(z-a) + E(z-a)^{\frac{3}{2}} + \ldots.$$

Mais il est permis de prendre pour le contour DEFD une circonférence décrite du point A comme centre avec un rayon très-petit ρ et de faire sur cette circonférence

$$z = a + \rho e^{\tau\sqrt{-1}},$$

d'où

$$dz = \sqrt{-1}\,\rho e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau :$$

il s'ensuit que la partie de l'intégrale $\int u_1\,dz$ relative au contour DEFD est égale à

$$\sqrt{-1}\left\{\begin{array}{l} A\rho^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} e^{\frac{\tau}{2}\sqrt{-1}}\,d\tau + B\rho\int_0^{2\pi} e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau \\ + C\rho^{\frac{3}{2}}\int_0^{2\pi} e^{\frac{3\tau}{2}\sqrt{-1}}\,d\tau + \ldots \end{array}\right\}$$

$$= -4\left(A\rho^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}C\rho^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}E\rho^{\frac{5}{2}} + \ldots\right),$$

et l'on voit qu'elle s'annule en même temps que ρ, comme nous l'avions annoncé. On prouvera de même que la portion d'intégrale relative au contour D'E'F'D' se réduit à zéro en même temps que les dimensions de ce contour. Ainsi, dans le cas qui nous occupe, la période $A_1 + A'_2$ est la limite de la somme des portions d'intégrale relatives aux deux chemins DHD' et D'HD, quand les points D et D' tendent respectivement vers A et A' : mais lorsque le point Z, après avoir parcouru le chemin DHD', revient suivre le chemin D'HD, en faisant le tour du point A', la fonction u_1 ne reprend pas les valeurs par lesquelles elle était passée d'abord, mais acquiert les valeurs qu'aurait eues dans un ordre inverse la fonction u_2, en partant du point D. La somme des portions d'intégrale relatives aux chemins DHD' et D'HD est donc la même chose que l'intégrale $\int (u_1 - u_2)\,dz$ prise le long de la ligne DHD', et en passant à la limite, on en conclut que la période $A_1 + A'_2$ est égale à la valeur de l'intégrale $\int (u_1 - u_2)\,dz$ prise le long de la ligne AHA'.

Ajoutons que, dans le cas que nous venons de considérer, la somme $A_1 + A_2$ se réduit à zéro; car elle exprime la valeur de l'intégrale $\int (u_1 + u_2)\,dz$, prise le long du contour DEFD; or on a, en prenant pour ce contour la circonférence du rayon ρ,

$$u_1 + u_2 = 2B + 2D(z - a) + 2F(z - a)^2 + \ldots,$$

et, par conséquent,

$$\int (u_1 + u_2)\,dz = 2\sqrt{-1}\left\{\begin{array}{l} B\rho\int_0^{2\pi} e^{\tau\sqrt{-1}}\,d\tau \\ + D\rho^2\int_0^{2\pi} e^{2\tau\sqrt{-1}}\,d\tau \\ + F\rho^3\int_0^{2\pi} e^{3\tau\sqrt{-1}}\,d\tau + \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

On voit, de la même manière, que la somme $A'_1 + A'_2$ est aussi nulle; ainsi les périodes $A_1 + A_2$, $A'_1 + A'_2$, disparaissent, tandis que les périodes $A_1 + A'_2$, $A_2 + A'_1$, étant égales et de signes contraires, n'en font plus qu'une seule distincte.

Lorsque le nombre des points A, A', A'', etc., sera un nombre pair $2n$, on pourra appliquer la remarque du n° **47**. Dans ce cas, en effet, chacune des fonctions u_1, u_2 reprendra sa valeur initiale après une révolution du point Z sur le contour Δ qui, passant par le point C, enveloppe tous les points A, A', A'', etc., $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}'''$, etc. La caractéristique (Δ) de ce contour contiendra deux sortes de termes qui pourront s'y trouver entremêlés, les uns de la forme $[+ A^{(i)}]$, les autres de la forme $[+ \mathcal{A}^{(i)}]$. Supposons, ce qui est permis, que les contours élémentaires $(+A)$, $(+A')$, $(+A'')\ldots$, $[+A^{(2n-2)}]$, $[+A^{(2n-1)}]$, s'y trouvent dans l'ordre où nous venons de les écrire, sauf les termes de la forme $[+ \mathcal{A}^{(i)}]$ qui peuvent se trouver entre eux. Appelons $[+ \mathcal{A}^{(\mu)}]$, $[+ \mathcal{A}^{(\mu')}]$, $[+ \mathcal{A}^{(\mu'')}]$, etc., ceux de ces derniers qui, dans la caractéristique (Δ), ont avant eux un nombre pair de termes de la forme $[+ A^{(i)}]$, et $[+ \mathcal{A}^{(\nu)}]$, $[+ \mathcal{A}^{(\nu')}]$, $[+ \mathcal{A}^{(\nu'')}]$, etc., ceux qui ont avant eux un nombre impair de termes de la forme $[+ A^{(i)}]$. L'équation du n° **47**, appliquée successivement aux deux fonctions u_1 et u_2, nous

donnera

$$A_1^{(\mu)} + A_1^{(\mu')} + A_1^{(\mu'')} + \ldots + A_2^{(\nu)} + A_2^{(\nu')} + A_2^{(\nu'')} + \ldots$$
$$+ \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}'_2 + \mathrm{A}''_1 + \mathrm{A}'''_2 + \ldots + \mathrm{A}_1^{(2n-2)} + \mathrm{A}_2^{(2n-1)} = 2\pi\lambda_1\sqrt{-1},$$
$$A_2^{(\mu)} + A_2^{(\mu')} + A_2^{(\mu'')} + \ldots + A_1^{(\nu)} + A_1^{(\nu')} + A_1^{(\nu'')} + \ldots$$
$$+ \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}'_1 + \mathrm{A}''_2 + \mathrm{A}'''_1 + \ldots + \mathrm{A}_2^{(2n-2)} + \mathrm{A}_1^{(2n-1)} = 2\pi\lambda_2\sqrt{-1},$$

λ_1 et λ_2 désignant les coefficients de $\frac{1}{z}$ dans les développements de u_1 et de u_2, suivant les puissances décroissantes de z.

Le premier membre de chacune de ces équations est la somme d'une partie des périodes contenues dans le tableau ci-dessus : lorsque λ_1 et λ_2 seront nuls, on tirera de là les valeurs de deux de ces périodes exprimées chacune par la somme prise en signe contraire de plusieurs autres, ce qui permettra de réduire de deux unités le nombre des périodes distinctes.

51. Faisons maintenant quelques applications de ce qui vient d'être dit dans le numéro précédent, et, d'abord, supposons que l'équation entre u et z soit

$$(z-a)u^2 = h^2,$$

h désignant une constante. Appelons A le point qui répond à $z=a$, et autour duquel les fonctions u_1, u_2 forment un système circulaire : l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ n'aura qu'une seule période $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$, qui exprime l'intégrale $\int (u_1 + u_2)\,dz$, prise sur le contour élémentaire $(+\mathrm{A})$. Mais, dans l'exemple dont il s'agit, on a

$$u_1 + u_2 = 0;$$

il en résulte

$$\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 = 0.$$

La période est donc nulle, et l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ n'a que les deux valeurs v_1 et $\mathrm{A}_1 + v_2$.

On arriverait à la même conclusion en considérant l'équation

$$u^2 = h^2 (z - a).$$

52. Prenons ensuite l'équation

$$(z - a)(z - a') u^2 = h^2 :$$

appelons A et A' les points correspondants à $z = a$ et à $z = a'$; relativement à chacun d'eux, les fonctions u_1 et u_2 forment un système circulaire. Les expressions générales des périodes données au n° **50** se réduisent ici aux quatre quantités

$$A_1 + A_2, \quad A_1 + A'_2, \quad A_2 + A'_1, \quad A'_1 + A'_2 ;$$

mais, de la relation $u_1 + u_2 = 0$, on conclut

$$A_1 + A_2 = 0, \quad A'_1 + A'_2 = 0,$$

et, par suite,

$$A_2 + A'_1 = -(A_1 + A'_2).$$

Ainsi les quatre périodes se ramènent à une seule distincte $A_1 + A'_2$; comme le produit $(z - a) u_1$ se réduit à zéro pour $z = a$, et qu'il en est de même du produit $(z - a') u_1$ pour $z = a'$, il suit d'une remarque faite au n° **50**, qu'on peut regarder la période $A_1 + A'_2$ comme exprimant la valeur de l'intégrale

$$\int_a^{a'} (u_1 - u_2) dz = 2 \int_a^{a'} u_1 dz = 2h \int_a^{a'} \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-a')}},$$

prise le long de la droite AA'. Pour en trouver la valeur, posons

$$z = \frac{a + a'}{2} + \frac{a - a'}{2} z',$$

z' étant une nouvelle variable à laquelle on peut faire correspondre un point mobile Z'. Les limites de z étant a et a', celles de z' seront -1 et $+1$, et lorsque le point Z décrira la droite AA', le point Z' décrira la portion de l'axe des x comprise entre les deux points qui répondent à $z' = -1$, $z' = +1$. On aura donc

$$2h \int_a^{a'} \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-a')}} = 2h \int_{-1}^{+1} \frac{dz'}{\sqrt{z'^2 - 1}} = \frac{2h}{\sqrt{-1}} \int_{-1}^{+1} \frac{dz'}{\sqrt{1 - z'^2}},$$

en supposant que z' passe de la valeur -1 à la valeur $+1$ par une suite de valeurs réelles et croissantes; mais, sous cette condition, on a

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dz'}{\sqrt{1-z'^2}} = \pi;$$

par conséquent la période unique de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ est $\frac{2\pi h}{\sqrt{-1}}$, ou, si l'on veut, $-\frac{2\pi h}{\sqrt{-1}} = 2\pi h\sqrt{-1}$, car il importe peu qu'on change le signe d'une période.

On peut l'obtenir autrement en observant que les points A, A′ sont ici en nombre pair, et qu'ainsi on peut appliquer la remarque qui termine le n° 50. Les coefficients de $\frac{1}{z}$, dans les développements de u_1 et de u_2, suivant les puissances décroissantes de z, sont $\pm h$ et $\mp h$; les deux équations établies à l'endroit qu'on vient de citer deviennent donc

$$A_1 + A'_2 = \pm 2\pi h\sqrt{-1}, \quad A_2 + A'_1 = \mp 2\pi h\sqrt{-1};$$

on retrouve bien, pour la période $A_1 + A'_2$, la même valeur $\pm 2\pi h\sqrt{-1}$.

Faisons, en particulier,

$$a = +1, \quad a' = -1, \quad h = +\sqrt{-1},$$

de sorte qu'on ait

$$u^2 = \frac{1}{1-z^2},$$

et posons

$$\int_0^z u_1\,dz = v,$$

u_1 désignant celle des valeurs de u dont la valeur initiale est $+1$ pour $z = 0$. Les diverses valeurs de v sont les arcs en nombre infini qui ont z pour sinus; en d'autres termes, on a

$$z = \sin v;$$

la période $\pm 2\pi h\sqrt{-1}$ se réduit ici à 2π, ce qui s'accorde bien avec

l'équation connue

$$\sin(v + 2l\pi) = \sin v,$$

où l désigne un nombre entier quelconque.

Si au lieu de l'équation

$$(z - a)(z - a')u^2 = h^2,$$

on eût considéré celle-ci :

$$u^2 = h^2(z - a)(z - a'),$$

on eût trouvé de la même manière, pour la période unique de l'intégrale $\int_c^k u_1\, dz$, l'expression

$$\frac{\pi h (a' - a)^2}{4}\sqrt{-1}.$$

53. Passons à l'équation

$$(z - a)(z - a')(z - a'')u^2 = h^2 :$$

la méthode générale fournira pour les périodes de l'intégrale $\int_c^k u_1\, dz$ les neuf quantités

$$\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2,\quad \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}'_2,\quad \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}''_2,\quad \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}'_1,\quad \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}''_1,$$
$$\mathrm{A}'_1 + \mathrm{A}'_2,\quad \mathrm{A}'_1 + \mathrm{A}''_2,\quad \mathrm{A}'_2 + \mathrm{A}''_1,\quad \mathrm{A}''_1 + \mathrm{A}''_2.$$

Mais, à cause de la relation

$$u_1 + u_2 = 0,$$

on a

$$\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 = 0,\quad \mathrm{A}'_1 + \mathrm{A}'_2 = 0,\quad \mathrm{A}''_1 + \mathrm{A}''_2 = 0;$$

il en résulte

$$\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}'_2 = \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}'_1,\quad \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}''_2 = -(\mathrm{A}''_1 - \mathrm{A}_1),\quad \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}'_1 = -(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}'_1),$$
$$\mathrm{A}_2 + \mathrm{A}''_1 = \mathrm{A}''_1 - \mathrm{A}_1,\quad \mathrm{A}'_1 + \mathrm{A}''_2 = \mathrm{A}'_1 - \mathrm{A}''_1,\quad \mathrm{A}'_2 + \mathrm{A}''_1 = -(\mathrm{A}'_1 - \mathrm{A}''_1),$$

ce qui réduit les périodes précédentes aux trois suivantes :

$$\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}'_1,\quad \mathrm{A}'_1 - \mathrm{A}''_1,\quad \mathrm{A}''_1 - \mathrm{A}_1,$$

et celles-ci à leur tour, ayant zéro pour somme, se réduisent à deux

distinctes pour lesquelles on peut prendre

$$A_1 - A'_1, \quad A_1 - A''_1,$$

ou, si l'on veut, nº **45**,

$$A_1 + A'_2, \quad A_1 + A''_2.$$

Ces deux périodes peuvent être regardées, nº **50**, comme les valeurs des intégrales $\int_a^{a'} (u_1 - u_2)\,dz$, $\int_a^{a''} (u_1 - u_2)\,dz$ prises le long de certaines lignes AH′A′, AH″A″ menées du point A aux points A′ et A″, et en disposant convenablement des lignes CDA, CD′A′, CD″A″, *fig.* 12, avec lesquelles les contours (A), (A′), (A″) se confondent sensiblement, on peut supposer que les lignes AH′A′, AH″A″ sont précisément les droites AA′, AA″. Alors, si l'on veut exprimer ces périodes par d'autres intégrales où la variable passe de la limite inférieure à la limite supérieure par une suite de valeurs réelles et croissantes, il suffira de faire dans la première

$$z = \frac{a + a'}{2} + \frac{a' - a}{2} z',$$

et dans la seconde

$$z = \frac{a + a''}{2} + \frac{a'' - a}{2} z'',$$

z' et z'' désignant deux nouvelles variables. Supprimant ensuite les accents de ces lettres sous le signe intégral, on trouvera que les deux périodes sont

$$2h \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)\left(\frac{a + a'}{2} - a'' + \frac{a' - a}{2} z\right)}},$$

$$2h \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)\left(\frac{a + a''}{2} - a' + \frac{a'' - a}{2} z\right)}}.$$

Si l'on avait, par exemple,

$$a = \frac{a' + a''}{2},$$

l'une de ces périodes serait le produit de l'autre par $\sqrt{-1}$.

54. Supposons maintenant que u soit déterminée par l'équation

$$(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')u^2 = h^2;$$

nous trouverons d'abord les seize périodes :

$$\begin{array}{llll} A_1 + A_2, & A_1 + A'_2, & A_1 + A''_2, & A_1 + A'''_2; \\ A_2 + A'_1, & A_2 + A''_1, & A_2 + A'''_1, & A'_1 + A'_2, \\ A'_1 + A''_2, & A'_1 + A'''_2, & A'_2 + A''_1, & A'_2 + A'''_1, \\ A''_1 + A''_2, & A''_1 + A'''_2, & A''_2 + A'''_1, & A'''_1 + A'''_2. \end{array}$$

A l'aide des équations

$$A_1 + A_2 = 0, \quad A'_1 + A'_2 = 0, \quad A''_1 + A''_2 = 0, \quad A'''_1 + A'''_2 = 0,$$

qui se déduisent de la relation

$$u_1 + u_2 = 0,$$

on réduira ces périodes à six, savoir :

$$A_1 - A'_1, \quad A_1 - A''_1, \quad A_1 - A'''_1, \quad A'_1 - A''_1, \quad A'_1 - A'''_1, \quad A''_1 - A'''_1.$$

La quatrième est la différence des deux premières; la cinquième est la différence de la première et de la troisième; enfin la sixième est la différence de la deuxième et de la troisième : de ces six périodes, il n'y a donc lieu de conserver que les trois premières, savoir :

$$A_1 - A'_1, \quad A_1 - A''_1, \quad A_1 - A'''_1.$$

Mais les points A, A', A'', A''' étant en nombre pair, on peut appliquer ici la remarque du n° 47. Supposons ces points A, A', A'', A''' nommés dans un ordre tel, que le contour fermé $(+A)(+A')(+A'')(+A''')$ puisse, sans franchir ces points, se réduire à une circonférence ayant l'origine des coordonnées pour centre et les renfermant tous quatre; observons, de plus, que les développements de u_1 et de u_2 suivant les puissances descendantes de z ne contiennent pas de terme en $\frac{1}{z}$; nous obtiendrons les deux équations

$$A_1 + A'_2 + A''_1 + A'''_2 = 0, \quad A_2 + A'_1 + A''_2 + A'''_1 = 0,$$

lesquelles, en vertu des relations

$$A_1 + A_2 = 0, \quad A'_1 + A'_2 = 0, \quad A''_1 + A''_2 = 0, \quad A'''_1 + A'''_2 = 0,$$

se réduisent à l'équation unique

$$A_1 - A'_1 + A''_1 - A'''_1 = 0,$$

ou bien

$$A_1 - A'''_1 = A_1 - A''_1 - (A_1 - A'_1).$$

De toutes nos périodes, il n'y en a donc définitivement que deux distinctes, savoir :

$$A_1 - A'_1, \quad A_1 - A''_1,$$

ou, si l'on veut,

$$A_1 + A'_2, \quad A_1 + A''_2.$$

On voit, comme au numéro précédent, que ces deux quantités peuvent être regardées comme les valeurs des intégrales $\int_a^{a'} (u_1 - u_2)\,dz$, $\int_a^{a''} (u_1 - u_2)\,dz$, ou ce qui est la même chose, $2\int_a^{a'} u_1\,dz$, $2\int_a^{a''} u_1\,dz$ prises respectivement le long des droites AA', AA''.

Supposons, par exemple, que l'équation en u soit

$$(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)\,u^2 = 1,$$

où k est un nombre positif moindre que 1. Prenons l'origine O des coordonnées pour point de départ de Z; appelons u_1 celles des deux valeurs de z dont la valeur initiale est $+1$, et nommons A, A', A'', A''' les points qui répondent respectivement aux valeurs $+1$, $+\frac{1}{k}$, -1, $-\frac{1}{k}$ de z. Alors, pour périodes de l'intégrale $\int_0^z u_1\,dz$, nous pourrons adopter les deux sommes $A_1 + A'_2$, $A_1 + A''_2$, ou, ce qui est la même chose, les deux quantités

$$2\int_{+1}^{+\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}, \quad 2\int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}},$$

ces intégrales étant prises le long des droites AA', AA''

De ces deux périodes, la seconde est réelle et égale à

$$4\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}};$$

l'autre est imaginaire et égale à

$$-2\sqrt{-1}\int_{+1}^{+\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}.$$

En posant

$$1-k^2=k'^2, \quad z=\frac{1}{k}\sqrt{1-k'^2z'^2},$$

on ramènera cette dernière quantité à la forme

$$-2\sqrt{-1}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}.$$

Si donc nous faisons avec M. Jacobi (*Fundamenta nova*, etc.)

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\mathrm{K}, \quad \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}=\mathrm{K}',$$

où z est supposée croître de zéro à l'unité par une suite de valeurs réelles, les deux périodes de l'intégrale $\int_0^z u_1\,dz$ seront $4\mathrm{K}$ et $2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$.

Posons

$$\int_0^z u_1\,dz=v;$$

z sera la fonction de v que M. Jacobi appelle sin am v : il suit de ce qui précède que z conservant la même valeur, on peut ajouter à v des multiples entiers quelconques de $4\mathrm{K}$ et $2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$; en d'autres termes, on aura

$$\sin \operatorname{am}(v+4l\mathrm{K}+2l'\mathrm{K}'\sqrt{-1})=\sin \operatorname{am} v,$$

l et l' désignant des nombres entiers quelconques. On retrouve ainsi une propriété connue des fonctions elliptiques.

Faisons à présent

$$1-z^2=x^2,$$

x étant une nouvelle variable : cette variable sera précisément la fonction de v représentée par cos am v. Dans l'équation différentielle

$$dv^2=u_1^2\,dz=\frac{dz^2}{(1-z^2)(1-k^2z^2)},$$

introduisons la variable x au lieu de z; il viendra

$$dv^2 = \frac{dx^2}{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2)};$$

on aura donc

$$v = \int_1^x u'_1\, dz,$$

u'_1 désignant une fonction de z qui satisfait à l'équation

$$(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)u'^2 = 1.$$

Si l'on veut appliquer à cette intégrale la théorie précédente, on prendra pour les points A, A', A'', A''', ceux qui répondent respectivement aux valeurs $+1$, $+\frac{k'}{k}\sqrt{-1}$, -1, $-\frac{k'}{k}\sqrt{-1}$, et les deux périodes seront $A_1 + A'_2$, $A_1 + A''_2$. La période $A_1 + A'_2$ est égale à l'intégrale $2\int_1^{\frac{k'}{k}\sqrt{-1}} u'_1\, dz$ prise le long de la droite AA', ou, ce qui est la même chose, à la somme de l'intégrale $2\int_1^0 u'_1\, dz$ prise le long de la droite AO, et de l'intégrale $2\int_0^{\frac{k'}{k}\sqrt{-1}} u'_1\, dz$ prise le long de la droite OA', O étant l'origine des coordonnées; on a donc

$$A_1 + A'_2 = 2\int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} + 2\int_0^{\frac{k'}{k}\sqrt{-1}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}},$$

où les intégrales du second membre sont ce que M. Cauchy appelle des *intégrales rectilignes*. Si l'on fait, dans la première,

$$z = \sqrt{1-z'^2},$$

et qu'ensuite on supprime l'accent, on trouve

$$\int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = -\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = -K,$$

et si, dans la seconde, on pose

$$z = \frac{k'\sqrt{-1}}{k}\sqrt{1-z'^2};$$

on trouve de même

$$\int_0^{\frac{k'}{k}\sqrt{-1}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = \sqrt{-1}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} = K'\sqrt{-1}:$$

il en résulte

$$A_1 + A'_2 = -2(K - K'\sqrt{-1}).$$

L'autre période $A_1 + A''_2$ est la valeur de l'intégrale $2\int_{+1}^{-1} u'_1\,dz$, prise le long de la droite AA″; on a donc

$$A_1 + A''_1 = 2\int_{+1}^{-1}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = 4\int_{+1}^{0}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} = -4K.$$

Ainsi, pour les deux périodes de l'intégrale $\int_1^x u'_1\,dz$, on peut prendre les deux quantités

$$4K,\quad 2(K - K'\sqrt{-1}),$$

et, par conséquent, on retrouve la propriété de la fonction $\cos \operatorname{am} v$ exprimée par l'équation

$$\cos \operatorname{am}\left[v + 4lK + 2l'(K - K'\sqrt{-1})\right] = \cos \operatorname{am} v.$$

Soit enfin

$$1 - k^2z^2 = y^2,$$

y désignant encore une nouvelle variable : cette variable sera la fonction de v représentée par $\Delta \operatorname{am} v$. L'équation différentielle

$$dv^2 = \frac{dz^2}{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

deviendra

$$dv^2 = \frac{dy^2}{(1-y^2)(y^2-k'^2)};$$

on aura donc

$$v = \int_1^y u''_1\,dz,$$

u''_1 désignant une fonction de z qui satisfait à l'équation

$$(1-z^2)(z^2-k'^2)u''^2 = 1.$$

Pour les points A, A′, A″, A‴, on pourra prendre ici ceux qui répondent respectivement aux valeurs $+k'$, $+1$, $-k'$, -1 de z, et alors on trouvera, pour valeurs des périodes $A_1 + A'_2$, $A_1 + A''_2$, les intégrales rectilignes

$$2\int_{k'}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}},$$

$$2\int_{k'}^{-k'} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}} = -4\int_{0}^{k'} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}}.$$

La première est réelle, et en y faisant

$$z = \sqrt{1 - k^2 z'^2},$$

elle devient

$$2\int_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 2K;$$

la seconde est imaginaire, et, en posant

$$z = k' z',$$

elle prend la forme

$$4\sqrt{-1}\int_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} = 4K'\sqrt{-1}.$$

L'intégrale $\int_{1}^{y} u''_1\, dz$ ayant les deux périodes

$$2K, \quad 4K'\sqrt{-1},$$

on en conclut l'équation

$$\Delta \operatorname{am}(v + 2lK + 4l'K'\sqrt{-1}) = \Delta \operatorname{am} v,$$

qui est également une formule connue de la théorie des fonctions elliptiques.

On voit que les deux quantités

$$4K, \quad 4K'\sqrt{-1}$$

sont des périodes communes aux trois fonctions $\sin \operatorname{am} v$, $\cos \operatorname{am} v$, $\Delta \operatorname{am} v$; car, pour reconnaître que $4K'\sqrt{-1}$ est une période de

cos am v, il suffit d'observer qu'on a

$$4\mathrm{K} - 2(2\mathrm{K} - 2\mathrm{K}'\sqrt{-1}) = 4\mathrm{K}'\sqrt{-1};$$

ainsi, en désignant par $\varphi(v)$ une quelconque de ces fonctions ou une fonction rationnelle des trois, on aura

$$\varphi(v + 4l\mathrm{K} + 4l'\mathrm{K}'\sqrt{-1}) = \varphi(v).$$

55. Dans le cas du numéro précédent, les trois périodes

$$\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}'_1, \quad \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}''_1, \quad \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}'''_1$$

ont été réduites à deux en vertu de l'équation

$$\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}'_1 + \mathrm{A}''_1 - \mathrm{A}'''_1 = 0;$$

mais cette réduction n'aurait plus lieu, en général, si la fonction u_1 était déterminée par l'équation

$$(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')u^2 - \mathrm{H}^2 = 0,$$

où H désigne un polynôme entier en z qui n'est divisible par aucun des quatre facteurs $z-a$, $z-a'$, $z-a''$, $z-a'''$. Il sera inutile, dans la recherche des périodes de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$, d'avoir égard aux points A, A', A'', etc., correspondants aux valeurs de z qui annulent H; car chacune des fonctions u_1, u_2 reprendra sa valeur initiale après une révolution de Z sur un quelconque des contours élémentaires (A), (A'), (A''), etc., et les intégrales élémentaires correspondantes seront toutes nulles. En désignant par A, A', A'', A''' les points pour lesquels z a respectivement les valeurs a, a', a'', a''', on trouvera, comme au numéro précédent, que l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ admet les trois périodes

$$\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}'_1 = p', \quad \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}''_1 = p'', \quad \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}'''_1 = p'''.$$

Mais la considération de la circonférence décrite de l'origine des coordonnées comme centre et renfermant les points A, A', A'', A''', A, A', A'', etc., nous donnera ici l'équation

$$\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}'_1 + \mathrm{A}''_1 - \mathrm{A}'''_1 = 2\pi\lambda\sqrt{-1},$$

ou bien

$$p' - p'' + p''' = 2\pi\lambda\sqrt{-1},$$

λ désignant le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de l'expression

$$\frac{H}{\sqrt{(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')}},$$

suivant les puissances descendantes de z. Tant que le polynôme H ne se réduira pas à une constante, le coefficient λ ne sera pas nul, au moins en général; les périodes p', p'', p''' seront donc distinctes et ne se réduiront à deux que dans des cas particuliers.

56. Passons à présent au cas où la fonction u est déterminée par l'équation

$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots[z-a^{(n-1)}]u^2 - h^2 = 0,$$

h désignant une constante et a, a',..., $a^{(n-1)}$ des quantités toutes inégales. On trouvera sans difficulté que les périodes de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ se réduisent aux $n-1$ suivantes :

$$A_1 - A'_1 = p', \quad A_1 - A''_1 = p'', \ldots, \quad A_1 - A_1^{(n-1)} = p^{(n-1)}.$$

Ces périodes seront, en général, distinctes, si le nombre n est impair; mais, s'il est pair, la considération de la circonférence qui renferme tous les points A, A', A'', etc., conduira à l'équation

$$A_1 - A'_1 + A''_1 - A'''_1 + \ldots + A_1^{(n-2)} - A_1^{(n-1)} = 0,$$

ou bien

$$p' - p'' + p''' - \ldots + p^{(n-1)} = 0,$$

en vertu de laquelle les $n-1$ périodes se réduisent à $n-2$ distinctes, savoir :

$$p', \quad p'', \quad p''', \ldots, \quad p^{(n-2)}.$$

En d'autres termes, le nombre des périodes distinctes est $2n$, lorsque le nombre des quantités a, a', a'', etc., est $2n+1$ ou $2n+2$, sauf le cas où ce dernier nombre étant égal à 2, celui des périodes est 1.

Observons que les périodes p', p'', p''', etc., ne sont autre chose que les valeurs de l'intégrale

$$\int (u_1 - u_2)\, dz = 2 \int u_1\, dz,$$

prise le long des droites AA′, AA″, AA‴, etc.

57. Le nombre n étant supposé pair, considérons encore l'équation

$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots[z-a^{(n-1)}]\, u^2 - \mathrm{H}^2 = 0,$$

où H désigne un polynôme entier en z qui n'est divisible par aucun des facteurs $z-a$, $z-a'$, $z-a''$, etc. Par les mêmes raisons qu'au nº **55**, il sera inutile de tenir compte des valeurs de z qui annulent H : les périodes de l'intégrale $\int_c^k u_1\, dz$ seront donc, comme tout à l'heure, les $n-1$ quantités

$$\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}'_1 = p', \quad \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}''_1 = p'', \ldots, \quad \mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_1^{(n-1)} = p^{(n-1)}.$$

Mais tandis que tout à l'heure on avait l'équation

$$p' - p'' + p''' - \ldots + p^{(n-1)} = 0,$$

qui réduisait à $n-2$ le nombre des périodes distinctes, on aura ici, nº **50**,

$$p' - p'' + p''' - \ldots + p^{(n-1)} = 2\pi\lambda\sqrt{-1},$$

λ désignant le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de l'expression

$$\frac{\mathrm{H}}{\sqrt{(z-a)(z-a')\ldots[z-a^{(n-1)}]}},$$

suivant les puissances descendantes de z, et tant que λ ne sera pas nul, les $n-1$ périodes resteront, en général, distinctes.

Le coefficient λ serait nul si le degré du polynôme H était moindre que $\frac{n}{2} - 1$; alors le nombre des périodes se réduirait à $n-2$. C'est ce qui arriverait, par exemple, pour l'intégrale

$$\int_c^k \frac{(\alpha + \beta z)\, dz}{\sqrt{\mathrm{P}}},$$

P désignant un polynôme du sixième degré en z; au lieu de cinq périodes distinctes, cette intégrale n'en aura que quatre.

Un autre cas où λ serait nul est celui où les polynômes H et $(z-a)(z-a')\ldots[z-a^{(n-1)}]$ seraient l'un et l'autre des fonctions paires de z, le degré du second étant, en outre, un multiple de 4.

58. Il est aisé de retrouver dans ce qu'on vient de dire les périodes des fonctions de plusieurs variables introduites par M. Jacobi dans la théorie des transcendantes abéliennes. Soient, par exemple, u et u' deux fonctions de z satisfaisant respectivement aux équations du second degré,

$$(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')(z-a^{\text{IV}})u^2-(\alpha+\beta z)^2=0,$$
$$(z-a)(z-a')(z-a'')(z-a''')(z-a^{\text{IV}})u'^2-(\alpha'+\beta' z)^2=0;$$

l'intégrale $\int_c^z u_1\,dz$ ayant, comme on l'a vu précédemment, quatre périodes, on peut, sans changer les limites et en disposant convenablement du chemin parcouru par le point Z, faire prendre à cette intégrale une valeur aussi voisine qu'on voudra d'une quantité donnée quelconque. Si donc on pose

$$\int_c^z u\,dz = v,$$

on ne pourra regarder z comme une fonction de v, puisque, z restant le même, v peut varier par degrés aussi petits qu'on voudra. Mais si l'on fait

$$\int_c^z u\,dz + \int_{c'}^{z'} u\,dz = v,\quad \int_c^z u'\,dz + \int_{c'}^{z'} u'\,dz = v',$$

les intégrales $\int_c^z u\,dz$, $\int_c^z u'\,dz$ étant prises le long d'une même ligne CMZ, et les intégrales $\int_{c'}^{z'} u\,dz$, $\int_{c'}^{z'} u'\,dz$ aussi le long d'une même ligne C'M'Z', on peut prouver, à l'aide du théorème d'Abel, que z et z' sont des fonctions déterminées de v et de v'; nous poserons donc

$$z=\varphi(v,v'),\quad z'=\varphi'(v,v').$$

Concevons maintenant qu'on vienne à changer le chemin CMZ, les points extrêmes C et Z restant les mêmes : si l'on appelle p, q, r, s les périodes trouvées ci-dessus de l'intégrale $\int_c^z u\,dz$, et p', q', r', s' les périodes de l'intégrale $\int_c^z u'\,dz$, les intégrales $\int_c^z u\,dz$, $\int_c^z u'\,dz$ s'accroîtront respectivement des quantités

$$hp + iq + kr + ls, \quad hp' + iq' + kr' + ls',$$

où h, k, i, l désignent quatre nombres entiers quelconques ayant les mêmes valeurs dans les deux formules. En effet, pour les deux fonctions u et u', les points A, A', A'', A''', A^{IV} sont les mêmes; par conséquent, tout contour fermé aura la même caractéristique relativement à ces deux fonctions.

On voit de la même manière que si l'on vient à changer le chemin C' M' Z', les points extrêmes C' et Z' restant les mêmes, les deux intégrales $\int_{c'}^{z'} u\,dz$, $\int_{c'}^{z'} u'\,dz$ augmenteront encore respectivement de quantités de la forme

$$hp + iq + kr + ls, \quad hp' + iq' + kr' + ls'.$$

Ainsi les quantités z et z', ou, si l'on veut, les fonctions $\varphi(v, v')$, $\varphi'(v, v')$ gardant les mêmes valeurs, on peut ajouter à la variable v l'expression

$$hp + iq + kr + ls,$$

pourvu qu'en même temps on ajoute à la variable v' l'expression

$$hp' + iq' + kr' + ls'.$$

En d'autres termes, on a les deux équations

$$\varphi(v + hp + iq + kr + ls,\ v' + hp' + iq' + kr' + ls') = \varphi(v, v'),$$
$$\varphi'(v + hp + iq + kr + ls,\ v' + hp' + iq' + kr' + ls') = \varphi'(v, v').$$

On retrouve ainsi pour les fonctions φ et φ' le caractère de quadruple périodicité signalé par M. Jacobi dans un Mémoire qui fait partie du Journal de M. Crelle (tome XIII, page 55) : on voit d'ailleurs ce que

sont les périodes $p, q, r, s, p', q', r', s'$. Appelons A, A', A'', A''', A^{IV} les valeurs de l'intégrale $\int u\,dz$ prise respectivement le long des contours élémentaires (+A), (+A'), (+A''), (+A'''), (+A^{IV}); soient pareillement $A_{,}$, $A'_{,}$, $A''_{,}$, $A'''_{,}$, $A^{\text{IV}}_{,}$ les valeurs de l'intégrale $\int u'\,dz$ prise le long des mêmes contours; on pourra adopter pour ces périodes les valeurs suivantes :

$$p = A - A', \quad q = A - A'', \quad r = A - A''', \quad s = A - A^{\text{IV}},$$

$$p' = A_{,} - A'_{,}, \quad q' = A_{,} - A''_{,}, \quad r' = A_{,} - A'''_{,}, \quad s' = A_{,} - A^{\text{IV}}_{,}.$$

On peut dire encore que si l'on joint le point A à chacun des points A', A'', A''', A^{IV}, les périodes p, q, r, s sont les valeurs de l'intégrale $2\int u\,dz$ prise le long des lignes AA', AA'', AA''', AA^{IV}, tandis que les périodes p', q', r', s' sont les valeurs de l'intégrale $2\int u'\,dz$ prise le long de ces mêmes lignes.

La proposition qu'on vient d'expliquer peut être aisément généralisée. Soient a, a', a'', etc., des quantités inégales quelconques au nombre de $2m$ ou $2m-1$: appelons $u, u', \ldots, u^{(m-2)}$ des fonctions de z satisfaisant respectivement aux équations du second degré

$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots u^2 - (\alpha + \beta z + \ldots + \varepsilon z^{m-2})^2 = 0,$$
$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots u'^2 - (\alpha' + \beta' z + \ldots + \varepsilon' z^{m-2})^2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(z-a)(z-a')(z-a'')\ldots u^{(m-2)^2} - [\alpha^{(m-2)} + \beta^{(m-2)} z + \ldots + \varepsilon^{(m-2)} z^{m-2}]^2 = 0.$$

Posons

$$\int_c^z u\,dz + \int_{c'}^{z'} u\,dz + \ldots + \int_{c^{(m-2)}}^{z^{(m-2)}} u\,dz = v,$$
$$\int_c^z u'\,dz + \int_{c'}^{z'} u'\,dz + \ldots + \int_{c^{(m-2)}}^{z^{(m-2)}} u'\,dz = v',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\int_c^z u^{(m-2)}\,dz + \int_{c'}^{z'} u^{(m-2)}\,dz + \ldots + \int_{c^{(m-2)}}^{z^{(m-2)}} u^{(m-2)}\,dz = v^{(m-2)},$$

les intégrales qui ont pour limites c et z étant toutes prises le long d'une même ligne CMZ, celles qui ont pour limites c' et z' étant également prises le long d'une même ligne C'M'Z', et ainsi de suite. On pourra regarder $z, z', \ldots, z^{(m-2)}$ comme des fonctions de $v, v', \ldots, v^{(m-2)}$, et écrire

$$z = \varphi[v, v', \ldots, v^{(m-2)}], \quad z' = \varphi'[v, v', \ldots, v^{(m-2)}], \ldots,$$
$$z^{(m-2)} = \varphi^{(m-2)}[v, v', \ldots, v^{(m-2)}].$$

Si maintenant on désigne par $p, q, \ldots, t$ les $2m-2$ périodes de l'intégrale $\int_c^z u\,dz$, par $p', q', \ldots, t'$ celles de l'intégrale $\int^z u'\,dz$, et ainsi de suite, on prouvera, comme tout à l'heure, que l'on a, pour une quelconque des fonctions $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(m-2)}$,

$$\varphi^{(k)}\begin{bmatrix} v + hp + iq + \ldots + lt, \\ v' + hp' + iq' + \ldots + lt', \ldots, \\ v^{(m-2)} + hp^{(m-2)} + iq^{(m-2)} + \ldots + lt^{(m-2)} \end{bmatrix} = \varphi^{(k)}[v, v', \ldots, v^{(m-2)}],$$

$h, i, \ldots, l$ étant des nombres entiers quelconques. Quant aux périodes $p, q, \ldots, t, p', q'$, etc., on les exprime sans peine à l'aide des notations adoptées précédemment : en effet, soient A, A', A'', etc., les valeurs de l'intégrale $\int u\,dz$ prise le long des contours élémentaires (+ A), (+ A'), (+ A''), etc.; soient $A_{,}, A'_{,}, A''_{,}$, etc., les valeurs de l'intégrale $\int u'\,dz$ prise le long des mêmes contours, $A_{,,}, A'_{,,}, A''_{,,}$, etc., celles de l'intégrale $\int u''\,dz$, et ainsi de suite : on pourra prendre

$$p = A - A', \quad q = A - A'', \ldots, \quad t = A - A^{(2m-2)},$$
$$p' = A_{,} - A'_{,}, \quad q' = A_{,} - A''_{,}, \ldots, \quad t' = A_{,} - A^{(2m-2)}_{,},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p^{(2m-2)} = A_{(2m-2)} - A'_{(2m-2)}, \ldots; \quad q^{(2m-2)} = A_{(2m-2)} - A''_{(2m-2)}, \ldots,$$
$$t^{(2m-2)} = A_{(2m-2)} - A^{(2m-2)}_{(2m-2)}.$$

On peut dire encore que les périodes $p, q, \ldots, t$ sont les valeurs de l'intégrale $2\int u\,dz$ prise le long des lignes AA', AA'', ..., AA$^{(2m-2)}$;

pareillement, les périodes p', q',..., t' sont les valeurs de l'intégrale $2\int u'dz$ prise suivant les mêmes lignes, et ainsi de suite.

59. Après avoir montré comment notre théorie fournit le nombre et l'expression des périodes de l'intégrale $\int_c^k u\,dz$, dans le cas où la fonction u dépend d'une équation du second degré, nous allons encore l'appliquer à des fonctions déterminées par des équations d'un degré plus élevé. Prenons, par exemple, l'équation binôme

$$(z-a)(z-a')\ldots[z-a^{(n-1)}]u^m - \mathrm{H}^m = 0,$$

où $a, a',\ldots, a^{(n-1)}$ désignent des quantités inégales, et H un polynôme entier qui n'est divisible par aucun des facteurs $z-a$, $z-a'$,..., $z-a^{(n-1)}$. On pourra, dans la recherche des diverses valeurs de $\int_c^k u_1\,dz$, se dispenser d'avoir égard aux points A, A', A'', etc., correspondants aux valeurs de z qui annulent H; car, après une révolution de Z sur le contour élémentaire qui enveloppe un de ces points, chacune des fonctions u_1, u_2, etc., reprend sa valeur initiale, et, de plus, les intégrales élémentaires relatives à un pareil contour sont toutes nulles. Soient maintenant A, A′, A″,..., $\mathrm{A}^{(n-1)}$ les points qui répondent respectivement aux valeurs $a, a',\ldots, a^{(n-1)}$ de z; il nous est permis de les supposer rangés dans un ordre tel, que le contour fermé qui a pour caractéristique

$$(+\mathrm{A})(+\mathrm{A}')(+\mathrm{A}'')\ldots[+\mathrm{A}^{(n-1)}]$$

puisse se réduire, sans franchir aucun de ces points, à une circonférence ayant l'origine des coordonnées pour centre et les renfermant tous.

Pour abréger l'écriture, nous ferons

$$\mathrm{A}_1-\mathrm{A}'_1=p'_1,\quad \mathrm{A}_2-\mathrm{A}'_2=p'_2,\ldots,\quad \mathrm{A}_m-\mathrm{A}'_m=p'_m,$$
$$\mathrm{A}_1-\mathrm{A}''_1=p''_1,\quad \mathrm{A}_2-\mathrm{A}''_2=p''_2,\ldots,\quad \mathrm{A}_m-\mathrm{A}''_m=p''_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_1^{(n-1)}=p_1^{(n-1)},\quad \mathrm{A}_2-\mathrm{A}_2^{(n-1)}=p_2^{(n-1)},\ldots,\quad \mathrm{A}_m-\mathrm{A}_m^{(n-1)}=p_m^{(n-1)},$$

d'où il suit, en appelant q, r, s des nombres entiers,

$$A_s^{(q)} - A_s^{(r)} = p_s^{(r)} - p_s^{(q)}.$$

Nous observerons ensuite que les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ peuvent être supposées rangées dans un ordre tel, que chacune d'elles acquière la valeur initiale de la suivante après une révolution de Z sur un quelconque des contours $(+A), (+A'), \ldots, [+A^{(n-1)}]$; cela revient à prendre

$$u_2 = e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}} u_1, \quad u_3 = e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}} u_1, \ldots, \quad u_m = e^{-\frac{(m-1)2\pi}{m}\sqrt{-1}} u_1.$$

Alors aussi chacune de ces fonctions acquerra la valeur initiale de la précédente après une révolution de Z sur un des contours $(-A)$, $(-A'), \ldots, [-A^{(n-1)}]$, et l'on aura par conséquent

$$\overset{(i)}{A}_{-1} = -\overset{(i)}{A}_m, \quad \overset{(i)}{A}_{-2} = -\overset{(i)}{A}_1, \quad \overset{(i)}{A}_{-3} = -\overset{(i)}{A}_2, \ldots, \quad \overset{(i)}{A}_{-m} = -\overset{(i)}{A}_{m-1}.$$

Enfin nous appellerons $v_1, v_2, \ldots, v_m$ les valeurs des intégrales $\int_c^k u_1\,dz, \int_c^k u_2\,dz, \ldots, \int_c^k u_m\,dz$, prises le long d'un chemin déterminé CMK.

Cela posé, il s'agit d'obtenir les expressions générales des valeurs de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ prise le long d'un chemin quelconque CLK.

La caractéristique de ce chemin étant donnée, il sera aisé d'écrire la valeur de l'intégrale : à chaque terme $[+A^{(q)}]$ de la caractéristique répondra, dans l'expression de l'intégrale, un terme de la forme $+A_i^{(q)}$, et, à chaque terme $[-A^{(q)}]$ de la caractéristique, un terme de la forme $-A_i^{(q)}$; au dernier terme CMK de la caractéristique répondra, dans l'intégrale, un terme tel que $+v_j$. Les indices i et j sont des nombres entiers et positifs qui se déterminent comme il suit : l'indice du premier terme de l'intégrale est 1, si ce terme est affecté du signe $+$, m, s'il est affecté du signe $-$; si deux termes consécutifs ont le signe $+$, l'indice du second surpasse d'une unité celui du premier; si ces deux termes ont le signe $-$, c'est au contraire l'indice du premier qui sur-

passe d'une unité celui du second [*]; enfin, si deux termes consécutifs ont des signes contraires, leurs indices sont égaux.

Admettons, pour fixer les idées, que, dans la caractéristique du chemin CLK, le nombre des termes positifs surpasse celui des termes négatifs ; il en sera de même dans l'expression de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$. Partageons cette expression à partir de la gauche en parties telles, que dans chacune d'elles le nombre des termes positifs surpasse de m unités celui des termes négatifs, sauf la dernière partie où la différence entre ces deux nombres peut être inférieure à m. La valeur d'une quelconque de ces parties, la dernière exceptée, pourra s'obtenir en ajoutant à la somme

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_m$$

un certain nombre de différences de la forme $A_q^{(s)} - A_r^{(s)}$; comme d'ailleurs, en vertu de l'équation

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_m = 0,$$

on a

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_m = 0,$$

la partie dont nous nous occupons se réduit à une somme de différences telles que $A_q^{(s)} - A_r^{(s)}$, et peut se représenter en conséquence par la formule

$$\begin{aligned}\varpi = {} & l'_1 p'_1 + l''_1 p''_1 + \ldots + l_1^{(n-1)} p_1^{(n-1)} \\ & + l'_2 p'_2 + l''_2 p''_2 + \ldots + l_2^{(n-1)} p_2^{(n-1)} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + l'_m p'_m + l''_m p''_m + \ldots + l_m^{(n-1)} p_m^{(n-1)},\end{aligned}$$

où les lettres l'_1, l''_1,..., $l_1^{(n-1)}$, l'_2, etc., représentent des nombres entiers positifs, nuls ou négatifs, et pouvant d'ailleurs avoir des valeurs quelconques. Les autres parties de l'expression de $\int_c^k u_1\,dz$ auront la

[*] Il est à peine nécessaire d'avertir que l'indice m augmenté d'une unité doit être remplacé par 1, et que l'indice 1 diminué d'une unité doit être remplacé par m.

même forme, sauf la dernière : quant à celle-ci, on voit aisément qu'à une quantité près de la forme ϖ, elle aura toujours une des valeurs suivantes :

$$v_1,$$
$$A_1 + v_2,$$
$$A_1 + A_2 + v_3,$$
$$A_1 + A_2 + A_3 + v_4$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$A_1 + A_2 + \ldots + A_{m-1} + v_m.$$

Par conséquent, toutes les valeurs que l'intégrale $\int_c^k u_1\, dz$ peut acquérir, suivant que le point Z va de C en K par tel ou tel chemin, sont comprises dans les m formules

$$\varpi + v_1,$$
$$\varpi + A_1 + v_2,$$
$$\varpi + A_1 + A_2 + v_3,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varpi + A_1 + A_2 + \ldots + A_{m-1} + v_m.$$

On a supposé, il est vrai, que dans l'expression de l'intégrale relative au chemin CLK, le nombre des termes positifs surpassait celui des termes négatifs ; si le contraire avait lieu, on ramènerait ce second cas au premier, en ajoutant à l'expression dont il s'agit une ou plusieurs fois la quantité $A_1 + A_2 + \ldots + A_m$ dont la valeur est zéro, et l'on arriverait encore à la même conclusion.

On voit par là que les quantités $p'_1, p''_1, \ldots, p_1^{(n-1)}, p'_2, \ldots, p_1^{(n-1)}$ sont autant de périodes de l'intégrale $\int_c^k u_1\, dz$, et que toute autre période de la même intégrale doit être composée de celles-là : de plus, toutes les valeurs en nombre infini de $\int_c^k u_1\, dz$ peuvent s'obtenir en ajoutant à m d'entre elles choisies convenablement des multiples entiers quelconques des périodes.

Considérons en particulier la période $p'_i = A_i - A'_i = A_i + A'_{-(i+1)}$; on voit qu'elle est égale à l'intégrale $\int u_i dz$ prise le long du contour fermé $(+A)(-A')$, et comme, après une révolution de Z sur ce contour, la fonction u_i reprend sa valeur initiale, on en conclut que la période p'_i est indépendante de la position du point C, n° **11**. Or, sans faire franchir au contour $(+A)(-A')$ aucun des points A, A′, A″, etc., on peut le faire coïncider avec un contour qui se compose de la ligne D′HD, *fig.* 25, du contour fermé infiniment petit DFED parcouru dans le sens direct, de la ligne DHD′, et enfin du contour infiniment petit D′F′E′D′ parcouru dans le sens inverse : la période p'_i peut donc être regardée comme exprimant la valeur de l'intégrale $\int u_i dz$ relative à ce nouveau contour. Mais le produit $(z-a)u_i$ se réduisant à zéro pour $z = a$, ainsi que le produit $(z-a')u_i$ pour $z = a'$, on prouvera, comme au n° **50**, que les portions d'intégrale relatives aux contours infiniment petits DEFD, D′F′E′D′ ont zéro pour limites, et l'on en conclura qu'on peut regarder p'_i comme la limite de la somme des portions d'intégrale relatives aux chemins D′HD, DHD′ : en d'autres termes, la période p'_i est la valeur de l'intégrale $\int (u_i - u_{i+1})dz$ prise le long de la ligne A′HA.

Ce que nous venons de dire de la période p'_i peut s'appliquer à toutes les autres : ainsi chacune d'elles peut être regardée comme la valeur de l'une des intégrales $\int (u_1 - u_2)dz$, $\int (u_2 - u_3)dz, \ldots,$ $\int (u_m - u_1)dz$, prise le long d'une ligne menée de l'un des points $A', A'', \ldots, A^{(n-1)}$ au point A.

Les quantités $p'_1, p''_1, \ldots, p_m^{(n-1)}$ sont au nombre de $m(n-1)$; mais il existe entre elles des relations faciles à obtenir. Comme on l'a déjà remarqué, on a

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_m = 0,$$

et, par suite,

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_m = 0,$$
$$A'_1 + A'_2 + \ldots + A'_m = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_1^{(n-1)} + A_2^{(n-1)} + \ldots + A_m^{(n-1)} = 0,$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_m = 0,$$
$$p''_1 + p''_2 + \ldots + p''_m = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_1^{(n-1)} + p_2^{(n-1)} + \ldots + p_m^{(n-1)} = 0.$$

On voit que les $n-1$ périodes p'_m, p''_m, ..., $p_m^{(n-1)}$ peuvent s'exprimer chacune par la somme prise en signe contraire de $m-1$ autres, ce qui réduit à $(m-1)(n-1)$ le nombre des périodes distinctes.

Rappelons-nous maintenant ce qui a été démontré tout à l'heure, que les périodes

$$p'_1, \quad p'_2, \quad p'_3, \ldots, \quad p'_m$$

sont respectivement égales aux intégrales

$$\int (u_1 - u_2)\,dz, \quad \int (u_2 - u_3)\,dz, \quad \int (u_3 - u_4)\,dz, \ldots, \quad \int (u_m - u_1)\,dz,$$

prises le long d'une même ligne menée du point A′ au point A, et, d'un autre côté, ayons égard aux équations

$$u_2 = e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\,u_1, \quad u_3 = e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}}\,u_1, \ldots, \quad u_m = e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}\sqrt{-1}}\,u_1;$$

nous en conclurons que les périodes

$$p'_1, \quad p'_2, \quad p'_3, \ldots, \quad p'_m,$$

sont respectivement égales aux intégrales

$$\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\right)\int u_1\,dz, \quad e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\right)\int u_1\,dz,$$

$$e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\right)\int u_1\,dz, \ldots, \quad e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\right)\int u_1\,dz,$$

prises le long d'une même ligne A′A; il en résulte sur-le-champ

$$p'_2 = e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\,p'_1, \quad p'_3 = e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}}\,p'_1, \ldots, \quad p'_m = e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}\sqrt{-1}}\,p'_1,$$

et l'on trouvera de même

$$p''_2 = e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\, p''_1,\quad p''_3 = e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}}\, p''_1,\ldots,\quad p''_m = e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}}\, p''_1,$$

. . . .

$$p_2^{(n-1)} = e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\, p_1^{(n-1)},\quad p_3^{(n-1)} = e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}}\, p_1^{(n-1)},\ldots,\quad p_m^{(n-1)} = e^{-\frac{(m-2).2\pi}{m}}\, p_1^{(n-1)}.$$

Ces relations comprennent les équations

$$p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_m = 0,$$
$$p''_1 + p''_2 + \ldots + p''_m = 0,$$
$$\text{etc.},$$

déjà établies tout à l'heure; on n'en déduit pas d'ailleurs d'autre équation propre à diminuer le nombre des périodes distinctes.

Considérons spécialement le cas où le nombre n des quantités a, a', a'', etc., est un multiple de m; alors chacune des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ reprendra sa valeur initiale après une révolution de Z sur un contour fermé qui entoure tous les points A, A′, A″, etc., et il y aura lieu d'appliquer à chacune d'elles la remarque du nº **47**. En appelant λ le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de l'expression

$$\frac{\mathrm{H}}{\sqrt[m]{(z-a)(z-a')\ldots[z-a^{(n-1)}]}},$$

suivant les puissances descendantes de z, on trouvera les équations

$$\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}'_2 + \mathrm{A}''_3 + \ldots + \mathrm{A}_m^{(n-1)} = 2\pi\lambda\sqrt{-1},$$
$$\mathrm{A}_2 + \mathrm{A}'_3 + \mathrm{A}''_4 + \ldots + \mathrm{A}_1^{(n-1)} = 2\pi\lambda e^{\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\sqrt{-1},$$
$$\mathrm{A}_3 + \mathrm{A}'_4 + \mathrm{A}''_5 + \ldots + \mathrm{A}_2^{(n-1)} = 2\pi\lambda e^{-\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1}}\sqrt{-1},$$

. . . .

$$\mathrm{A}_m + \mathrm{A}'_1 + \mathrm{A}''_2 + \ldots + \mathrm{A}_{m-1}^{(n-1)} = 2\pi\lambda e^{-\frac{(m-1).2\pi}{m}\sqrt{-1}}\sqrt{-1},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$p'_2 + p''_3 + p'''_4 + \ldots + p^{(n-1)}_m = -2\pi\lambda\sqrt{-1},$$

$$p'_3 + p''_4 + p'''_5 + \ldots + p^{(n-1)}_1 = -2\pi\lambda e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}\sqrt{-1},$$

$$p'_4 + p''_5 + p'''_6 + \ldots + p^{(n-1)}_2 = -2\pi\lambda e^{-\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}}\sqrt{-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p'_1 + p''_2 + p'''_3 + \ldots + p^{(n-1)}_{m-1} = -2\pi\lambda e^{-\frac{(m-1)2\pi}{m}\sqrt{-1}}\sqrt{-1}.$$

Ces m équations se réduisent à $m-1$ distinctes en vertu des relations déjà établies entre les périodes; car, en les ajoutant membre à membre, on arrive à l'identité $0=0$. Si, de plus, le coefficient λ est nul, on pourra de ces équations tirer $m-1$ périodes exprimées chacune par la somme prise en signe contraire de plusieurs autres, et le nombre des périodes distinctes, qui était $(m-1)(n-1)$, se trouvera réduit à $(m-1)(n-2)$. Cette circonstance se présentera, en particulier, lorsque le degré du polynôme H sera inférieur au nombre entier $\frac{n}{m} - 1$.

Il est aisé de voir quelles sont dans ces différents cas les périodes qu'on devra regarder comme distinctes. En effet, lorsque n ne sera pas un multiple de m, ou lorsque n étant divisible par m, λ sera quelconque, on pourra, en vertu des équations

$$p'_m = -p'_1 - p'_2 - p'_3 - \ldots,$$

$$p''_1 = -p''_2 - p''_3 - p''_4 - \ldots,$$

$$p'''_2 = -p'''_3 - p'''_4 - p'''_5 - \ldots,$$

etc.,

exclure les périodes p'_m, p''_1, p'''_2, etc., et les $(m-1)(n-1)$ restantes seront généralement distinctes. Mais si, n étant divisible par m, λ est nul, on aura entre ces périodes restantes les $m-1$ équations

$$p'_1 + p''_2 + p'''_3 + \ldots + p^{(n-1)}_{m-1} = 0,$$

$$p'_2 + p''_3 + p'''_4 + \ldots + p^{(n-1)}_m = 0,$$

$$p'_3 + p''_4 + p'''_5 + \ldots + p^{(n-1)}_1 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p'_{m-1} + p''_m + p'''_1 + \ldots + p^{(n-1)}_{m-3} = 0;$$

d'où l'on tire

$$p'_1 = -p''_2 - p'''_3 - \ldots - p^{(n-1)}_{m-1},$$

$$p'_2 = -p''_3 - p'''_4 - \ldots - p^{(n-1)}_{m},$$

$$p'_3 = -p''_4 - p'''_5 - \ldots - p^{(n-1)}_{1},$$

. . . .

$$p'_{m-1} = -p''_m - p'''_1 - \ldots - p^{(n-1)}_{m-3},$$

ce qui permet d'exclure encore les périodes $p'_1, p'_2, \ldots, p_{m-1}$. Ainsi, dans le cas général où le nombre des périodes distinctes est $(m-1)(n-1)$, on peut prendre pour ces périodes les quantités

$$\begin{array}{llllll}
p'_1, & p'_2, & p'_3, \ldots, & p'_{m-3}, & p'_{m-2}, & p'_{m-1}, \\
p''_2, & p''_3, & p''_4, \ldots, & p''_{m-2}, & p_{m-1}, & p''_m, \\
p'''_1, & p'''_3, & p'''_4, \ldots, & p'''_{m-2}, & p'''_{m-1}, & p'''_m, \\
p^{\text{iv}}_1, & p^{\text{iv}}_2, & p^{\text{iv}}_4, \ldots, & p^{\text{iv}}_{m-2}, & p^{\text{v}}_{m-1}, & p^{\text{iv}}_m,
\end{array}$$

etc.,

ou bien, en représentant par ω l'exponentielle $e^{-\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}}$,

$$\begin{array}{llllll}
p'_1, & \omega p'_1, & \omega^2 p'_1, \ldots, & \omega^{m-4} p'_1, & \omega^{m-3} p'_1, & \omega^{m-2} p'_1, \\
\omega p''_1, & \omega^2 p''_1, & \omega^3 p''_1, \ldots, & \omega^{m-3} p''_1, & \omega^{m-2} p''_1, & \omega^{m-1} p''_1, \\
p'''_1, & \omega^2 p'''_1, & \omega^3 p'''_1, \ldots, & \omega^{m-3} p'''_1, & \omega^{m-2} p'''_1, & \omega^{m-1} p'''_1, \\
p^{\text{iv}}_1, & \omega p^{\text{iv}}_1, & \omega^3 p^{\text{iv}}_1, \ldots, & \omega^{m-3} p^{\text{iv}}_1, & \omega^{m-2} p^{\text{iv}}_1, & \omega^{m-1} p^{\text{iv}}_1,
\end{array}$$

etc.

Lorsque le nombre n sera divisible par m et que le coefficient λ sera nul, il suffira, pour avoir les $(m-1)(n-2)$ périodes distinctes, de supprimer la première ligne horizontale dans l'un ou l'autre des deux tableaux précédents. Ces périodes seront donc

$$\begin{array}{llllll}
\omega p''_1, & \omega^2 p''_1, & \omega^3 p''_1, \ldots, & \omega^{m-3} p''_1, & \omega^{m-2} p''_1, & \omega^{m-1} p''_1, \\
p'''_1, & \omega^2 p'''_1, & \omega^3 p'''_1, \ldots, & \omega^{m-3} p'''_1, & \omega^{m-2} p'''_1, & \omega^{m-1} p'''_1, \\
p^{\text{iv}}_1, & \omega p^{\text{iv}}_1, & \omega^3 p^{\text{iv}}_1, \ldots, & \omega^{m-3} p^{\text{iv}}_1, & \omega^{m-2} p^{\text{iv}}_1, & \omega^{m-1} p^{\text{iv}}_1, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
p_1, & \omega p^{(n-1)}_1, & \omega^2 p^{(n-1)}_1, \ldots, & \omega^{m-4} p^{(n-1)}_1, & \omega^{(m-2)} p^{(n-1)}_1, & \omega^{(m-1)} p^{(n-1)}_1.
\end{array}$$

60. Pour dernière application, considérons l'équation du troisième degré

$$u^3 - u + z = 0.$$

Appelons u_1, u_2, u_3 les trois fonctions déterminées par cette équation, qui, pour la valeur initiale $z = 0$, se réduisent respectivement à 0, $+1$, -1. On a prouvé, n° **32**, que la première et la deuxième deviennent égales lorsque le point Z, parti de l'origine O, arrive au point A qui répond à $z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$, après avoir suivi la droite OA, et que la première et la troisième deviennent égales, lorsque le point Z, parti de l'origine, arrive par la droite OA' au point A' qui répond à $z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$; les points A et A' sont d'ailleurs les seuls pour lesquels l'équation proposée puisse avoir des racines égales. Supposons, ce qui est permis, que les contours élémentaires (A) et (A') se confondent sensiblement avec les droites OA, OA'; nommons v_1, v_2, v_3 les valeurs des intégrales $\int_0^k u_1\,dz$, $\int_0^k u_2\,dz$, $\int_0^k u_3\,dz$ prises le long d'un chemin déterminé OMK, et proposons-nous de trouver toutes les valeurs que l'intégrale $\int_0^k u_1\,dz$ peut acquérir, suivant que le point Z va de O en K par tel ou tel chemin.

On a vu, n° **32**, qu'après une révolution de Z sur le contour (A), les racines u_1 et u_2 échangent leurs valeurs initiales, tandis que u_3 reprend la sienne : la fonction $u_1 + u_2$ reprend donc aussi sa valeur initiale. Par suite, les intégrales $\int u_3\,dz$, $\int (u_1 + u_2)\,dz$, prises le long du contour (+ A), ne changeront pas si l'on suppose que ce contour se réduise à une ligne fermée infiniment petite tracée autour du point A; comme, en ce point, les fonctions u_3 et $u_1 + u_2$ conservent des valeurs finies, on en conclut, n° **46**,

$$A_3 = 0, \quad A_1 + A_2 = 0.$$

On reconnaît aisément que les intégrales A_3 et A_{-3} sont composées d'éléments deux à deux égaux et de signes contraires; il en est de même des deux intégrales A_1, A_{-2}, et aussi des deux intégrales A_2, A_{-1}; on a donc

$$A_3 = A_{-3} = 0, \quad A_1 = -A_2 = A_{-1} = -A_{-2}:$$

on trouvera pareillement

$$A'_2 = A'_{-2} = 0, \quad A'_1 = -A'_{-3} = A'_{-1} = -A'_{-3}.$$

On conclut d'abord de ces égalités qu'on peut changer le signe d'un terme quelconque de la caractéristique sans altérer la valeur de l'intégrale cherchée : on pourra donc se dispenser de mettre ce signe en évidence. Observons que, sur le contour (A) (A), chacune des fonctions u_1, u_2, u_3 reprend sa valeur initiale après une révolution de Z, et que les intégrales $\int u_1\,dz$, $\int u_2\,dz$, $\int u_3\,dz$, prises le long de ce contour, se réduisent à zéro en vertu des relations précédentes. Par conséquent, si dans la caractéristique du chemin quelconque OLK suivi par Z, on trouve les deux termes consécutifs (A) (A), il sera permis de les supprimer : le même raisonnement s'applique aux deux termes consécutifs (A') (A'). On peut donc supposer que, dans la caractéristique du chemin OLK, deux termes consécutifs quelconques renferment toujours l'un la lettre A, l'autre la lettre A'.

Alors les trois premiers termes forment nécessairement un des deux groupes suivants :

$$(A)(A')(A), \quad (A')(A)(A');$$

or, après une révolution de Z sur le contour fermé que représente l'un ou l'autre de ces deux groupes, la fonction u_1 reprend sa valeur initiale, et d'ailleurs l'intégrale $\int u_1\,dz$ prise le long de ce contour est nulle. On peut donc, sans altérer l'intégrale $\int_0^k u_1\,dz$, supprimer les trois premiers termes de la caractéristique du chemin OLK ; par la même raison, on pourra supprimer les trois suivants, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la caractéristique soit réduite à une de celles-ci,

$$+\mathrm{OMK}, \ (A)+\mathrm{OMK}, \ (A')+\mathrm{OMK}, \ (A)(A')+\mathrm{OMK}, \ (A')(A)+\mathrm{OMK},$$

et les valeurs correspondantes de l'intégrale $\int_0^k u_1\,dz$, seront

$$v_1, \quad A_1 + v_2, \quad A'_1 + v_3, \quad A_1 + v_2, \quad A'_1 + v_3.$$

On voit donc que, quel que soit le chemin OLK, cette intégrale n'a que trois valeurs distinctes qu'on peut présenter sous la forme

$$v_1, \quad A_1 + v_2, \quad A_1 + v_3;$$

car de ce que l'équation proposée n'est pas altérée par le changement simultané de u en $-u$ et de z en $-z$, on conclut aisément la relation $A'_1 = A_1$. Le nombre des valeurs de l'intégrale $\int_0^k u_1 dz$ étant limité, il n'y a pas lieu, dans l'exemple qu'on vient de traiter, à en chercher les périodes.

En général, l'intégrale $\int_c^z u dz$ n'aura qu'un nombre limité de valeurs, et, par suite, sera dépourvue de périodes, toutes les fois que l'équation entre u et z sera de la forme

$$f(u) = z,$$

$f(u)$ désignant un polynôme entier en u et indépendant de z. En effet, si l'on pose

$$\int_0^z u dz = v,$$

on aura

$$dv = u dz = u f'(u) du,$$

d'où

$$v = \int u f'(u) du = F(u),$$

$F(u)$ désignant un polynôme entier en u. Pour chaque valeur de z, le nombre des valeurs de v est donc égal à celui des valeurs de u, lequel est limité en vertu de l'équation algébrique

$$f(u) = z.$$

Je me propose, dans un autre article, d'appliquer à de nouvelles fonctions les principes établis dans celui-ci; mais je crois devoir, en terminant, signaler d'une manière précise les emprunts que j'ai faits aux travaux de M. Cauchy, et notamment aux remarquables Mémoires qui font partie du tome XXIII des *Comptes rendus* (année 1846). On y lit à la page 700 une définition des fonctions continues, identique à celle que je donne au commencement du présent article; mais je ne crois pas que le savant géomètre ait énoncé les théorèmes des n^os **6** et **7**, théorèmes qui sont indispensables pour l'étude des fonctions ainsi définies.

C'est à M. Cauchy qu'il appartient d'avoir expliqué la véritable idée

qu'on doit se faire d'une intégrale prise entre des limites imaginaires et de ses valeurs multiples : la proposition que je donne à ce sujet, n° **9**, a été démontrée par lui il y a déjà longtemps. (Voir le *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires.*) Les théorèmes des n^{os} **10**, **11**, **12**, qui en sont des corollaires, reviennent à ceux qu'énonce M. Cauchy dans le tome déjà cité des *Comptes rendus*, pages 253 et 692; ils acquièrent seulement une signification plus précise lorsqu'on sait, par les théorèmes des n^{os} **6** et **7** et par ceux qui sont établis dans la seconde partie du présent Mémoire, dans quels cas la fonction qu'on intègre le long d'un contour reprend ou ne reprend pas sa valeur initiale après une révolution du point mobile. J'en déduis le développement en série de la fonction u par une méthode qui est due à M. Cauchy et qu'il a plusieurs fois reproduite : lorsque j'ai démontré les propositions que je lui empruntais, c'est que je voulais les appliquer spécialement aux fonctions algébriques, et qu'alors les conditions sous lesquelles elles ont lieu comportent un énoncé plus net.

Dans la seconde partie, j'examine d'abord la manière dont les fonctions u_1, u_2, etc., échangent leurs valeurs autour des points pour lesquels l'équation en u a des racines égales ou infinies, et j'établis à ce sujet, n^{os} **18-27**, des propositions qui me paraissent nouvelles : la possibilité de partager ces fonctions en systèmes circulaires pouvait se déduire d'un théorème de M. Cauchy sur les substitutions (*Journal de l'École Polytechnique*, tome X); mais la méthode que j'ai donnée permet d'effectuer réellement ce partage.

La réduction à un seul chemin et à une série de contours élémentaires de tous les chemins par lesquels on peut aller d'un point à un autre, la notation que j'adopte, et les conséquences que j'en tire relativement aux valeurs que la fonction acquiert par ces divers chemins, me paraissent n'avoir encore été données par personne.

Dans la troisième partie, qui contient les applications au calcul intégral, je commence par réduire une intégrale définie prise le long d'un chemin quelconque à une intégrale prise le long d'un seul chemin, plus une suite d'intégrales élémentaires. Le principe de cette réduction appartient à M. Cauchy, et le calcul indiqué à la page 788 du tome déjà cité des *Comptes rendus* revient à celui de mes intégrales

élémentaires. Mais la notation dont je me sers et l'emploi des propositions établies dans la seconde partie me permettent d'aller plus loin dans le cas où la fonction u dépend d'une équation du second degré, ou d'une équation binôme, et encore dans d'autres cas étendus que je traiterai plus tard : je parviens, en effet, n^{os} **50** et **59**, à des formules générales qui comprennent toutes les valeurs d'une intégrale définie prise entre deux limites données et ne comprennent que ces valeurs.

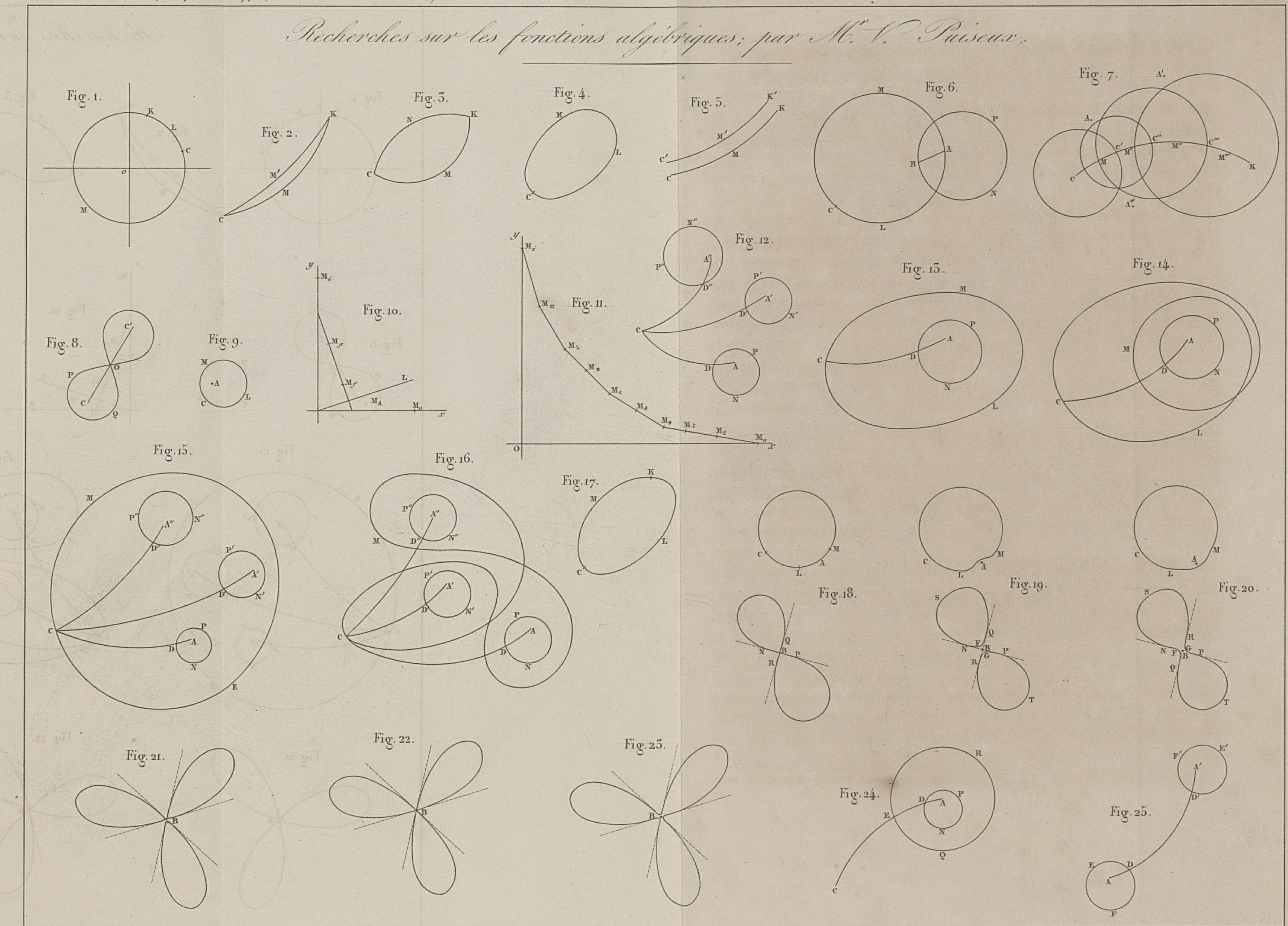
Ces formules sont nécessaires, à mon avis, pour faire connaître toutes les périodes et pour montrer qu'à une valeur quelconque d'une intégrale on peut ajouter des multiples entiers quelconques de toutes les périodes, sans cesser d'avoir une valeur de la même intégrale. Des indications données par M. Cauchy (page 698 du volume cité) on peut bien conclure l'existence d'un certain nombre de périodes, et dans un travail inédit l'illustre analyste retrouve de cette manière les périodes connues des fonctions elliptiques; mais, en suivant cette marche, on n'est pas assuré de les obtenir toutes, et l'on ne voit pas que chacune d'elles appartienne à toutes les valeurs de l'intégrale.

Je dois dire encore que les résultats auxquels je suis arrivé concordent avec ceux qu'a obtenus M. Hermite dans un travail dont l'extrait se trouve au tome XVIII des *Comptes rendus* (séance du 17 juin 1844). Par une heureuse généralisation de la marche qu'a suivie M. Jacobi pour les fonctions abéliennes, l'auteur obtient les expressions des périodes des fonctions inverses des intégrales de différentielles algébriques; mais, pour bien comprendre la signification de ces résultats, il me semble nécessaire de prendre pour point de départ la définition donnée par M. Cauchy des intégrales prises entre des limites imaginaires : c'est à ce point de vue seulement qu'on peut se rendre compte des valeurs multiples de ces intégrales [*].

---

[*] Je profiterai de cette occasion pour avertir d'une erreur typographique qui se trouve à la page 242 du tome XIV de ce Journal : *au lieu de ces mots*, une démonstration à laquelle j'étais parvenu, *il faut lire* une démonstration plus simple que celle à laquelle j'étais parvenu.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.



Gravé par E. Wormser.

SUR LES

FORMES CUBIQUES TERNAIRES ET QUATERNAIRES,

Par M. H. POINCARÉ,

Professeur à la Faculté de Caen.

Extrait du *Journal de l'École Polytechnique*, L^e Cahier; 1882.

PREMIÈRE PARTIE (¹).

I. — Introduction.

L'étude arithmétique des formes homogènes est une des questions les plus intéressantes de la théorie des nombres et une de celles qui ont le plus occupé les géomètres. Les divers problèmes qui se rattachent à la théorie des formes quadratiques binaires ont été résolus depuis longtemps, grâce à la notion de réduite, et la solution en a été développée dans des Ouvrages aujourd'hui classiques. La notion de réduite s'étendait sans peine aux formes quadratiques définies d'un nombre quelconque de variables, et les questions relatives à ces formes ont été traitées dans un grand nombre de Mémoires, parmi lesquels nous citerons un remarquable travail de MM. Korkine et Zolotareff, inséré dans les Tomes VI et XI des *Matematische Annalen* et auquel nous ferons de nombreux emprunts.

Généraliser une idée aussi utile, trouver des formes jouant dans le cas général le même rôle que les réduites remplissent dans le cas des formes quadratiques définies, tel est le problème qui se pose naturellement et que M. Hermite a résolu de la façon la plus élégante dans divers Mémoires insérés dans les Tomes 42 et 47 du *Journal de Crelle*.

(¹) La *seconde Partie* paraîtra dans le *LIe Cahier*.

M. Hermite s'est borné à l'étude des formes quadratiques définies ou indéfinies et des formes décomposables en facteurs linéaires; mais sa méthode peut s'étendre sans difficulté au cas le plus général. Je crois que cette généralisation peut conduire à des résultats intéressants, et c'est ce qui m'a déterminé à entreprendre ce travail.

Ce n'est pas la première fois, d'ailleurs, que l'on tente l'application des procédés de M. Hermite à une forme quelconque, et je dois citer à ce sujet un remarquable théorème de M. Jordan (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 5 mai 1879), dont je donnerai dans ce Mémoire une démonstration nouvelle.

Les résultats auxquels je suis arrivé s'appliquent à une forme quelconque; mais, ne voulant pas sacrifier la clarté à la généralité, je me suis restreint aux formes qui sont les plus simples parmi celles que M. Hermite avait laissées de côté. On verra aisément, d'ailleurs, quels sont ceux des théorèmes qui s'étendent au cas le plus général et comment on devait faire pour les généraliser.

Les plus simples de toutes les formes, après les formes quadratiques et les formes décomposables en facteurs linéaires, sont les formes cubiques ternaires. Mais si je m'étais borné à envisager un cas aussi particulier, bien des résultats importants seraient restés dans l'ombre; c'est ce qui m'a déterminé à dire quelques mots des formes cubiques quaternaires. Je n'ai pu pourtant en faire une étude aussi complète que des formes à trois variables; non pas que cette étude présente plus de difficulté, mais parce que j'aurais eu à envisager un nombre très considérable de cas particuliers et que j'aurais été entraîné ainsi à des longueurs inutiles; mon but n'étant que de mettre en lumière quelques particularités propres aux formes quaternaires, j'ai préféré me borner à un petit nombre d'exemples.

Outre la simplicité des formes cubiques ternaires et quaternaires, d'autres considérations ont influé sur mon choix. Ces formes ont été en effet, au point de vue algébrique, l'objet de travaux très intéressants et très complets, et, grâce au lien étroit qui rapproche l'Algèbre supérieure de l'Arithmétique supérieure, ces résultats m'ont été d'un grand secours. Parmi les Mémoires auxquels je renverrai, je citerai :

Un Mémoire de M. Hesse sur les courbes du troisième ordre (*Journal de Crelle*, t. 28);

Deux Mémoires de M. Aronhold sur les formes cubiques ternaires (*Journal de Crelle*, t. 39 et 55);

Un Mémoire de M. Clebsch sur les formes cubiques ternaires (*Mathematische Annalen*, t. VI);

Un Mémoire de M. Steiner sur les surfaces du troisième ordre (*Journal de Crelle*, t. 53) et enfin deux Mémoires de M. Clebsch, intitulés *Ueber die homogene Functionen dritten Grades*, etc. (*ibid.*, t. 58) et *Ueber Knotenpunkte*, etc. (*ibid.*, t. 59).

II. — Définitions.

Nous regarderons deux formes comme identiques quand les coefficients seront les mêmes, quand même les indéterminées seraient représentées par des lettres différentes Nous représenterons une substitution linéaire

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_1\xi_1 + \beta_1\xi_2 + \gamma_1\xi_3 + \delta_1\xi_4, \\ x_2 = \alpha_2\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \gamma_2\xi_3 + \delta_2\xi_4, \\ x_3 = \alpha_3\xi_1 + \beta_3\xi_2 + \gamma_3\xi_3 + \delta_3\xi_4, \\ x_4 = \alpha_4\xi_1 + \beta_4\xi_2 + \gamma_4\xi_3 + \delta_4\xi_4 \end{cases}$$

par la notation

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix}.$$

Dans tout ce qui va suivre, nous désignerons indifféremment les anciennes et les nouvelles variables soit par x_1, x_2, x_3, x_4 et ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, soit par x, y, z, t, et ξ, η, ζ, τ.

Si dans une forme F, homogène en x_1, x_2, x_3, x_4, on fait la substitution T, on obtient une forme en ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, que nous représenterons par la notation

$$F.T.$$

Si dans les équations (1) on fait les substitutions linéaires

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= a_1 \eta_1 + b_1 \eta_2 + c_1 \eta_3 + d_1 \eta_4, \\
\xi_2 &= a_2 \eta_1 + b_2 \eta_2 + c_2 \eta_3 + d_2 \eta_4, \\
\xi_3 &= a_3 \eta_1 + b_3 \eta_2 + c_3 \eta_3 + d_3 \eta_4, \\
\xi_4 &= a_4 \eta_1 + b_4 \eta_2 + c_4 \eta_3 + d_4 \eta_4,
\end{aligned}$$

qui définissent une nouvelle transformation T′, on obtient quatre équations linéaires entre x_1, x_2, x_3, x_4, η_1, η_2, η_3, η_4. Ces relations définissent une autre substitution linéaire que nous désignerons par la notation

$$T.T'.$$

Ces opérations auront donc pour symbole le signe même de la multiplication. Toutefois, il faut remarquer qu'elles ne sont pas commutatives, c'est-à-dire qu'on n'a pas

$$T.T' = T'.T,$$

mais qu'elles sont associatives, c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{aligned}
T.(T'.T'') &= (T.T')T'', \\
F.(T.T') &= (F.T)T'.
\end{aligned}$$

Une transformation T sera unitaire si elle a pour déterminant 1; elle sera réelle si ses coefficients sont réels, entière si ses coefficients sont entiers.

Deux formes seront *algébriquement équivalentes* ou du même *type* si elles peuvent dériver d'une même troisième par des substitutions unitaires.

Elles seront *réellement équivalentes* ou du même *sous-type* si elles peuvent dériver d'une même troisième par des substitutions réelles et unitaires.

Enfin elles seront *arithmétiquement équivalentes* ou simplement *équivalentes* ou de la même *classe* si elles peuvent dériver d'une même troisième par des substitutions entières et unitaires.

On choisira dans chaque type ou dans chaque sous-type, pour le repré-

senter, une des formes de ce type ou de ce sous-type que l'on appellera la *forme canonique*. Nous désignerons généralement cette canonique par la lettre H. Le choix de la forme H est à peu près arbitraire; toutefois on sera conduit, dans la plupart des cas, à choisir de préférence la forme la plus simple du type considéré.

Disons quelques mots maintenant du langage géométrique dont il sera fait plusieurs fois usage dans ce travail. Si l'on considère x_1, x_2, x_3 comme les coordonnées trilatères d'un point du plan, si F est une forme homogène en x_1, x_2, x_3, l'équation

$$F = 0$$

définit une courbe plane C. Nous dirons habituellement que la forme F représente la courbe C. De même, si x_1, x_2, x_3, x_4 sont les coordonnées tétraédriques d'un point de l'espace, nous dirons qu'une forme F, homogène par rapport à ces quatre variables, représente la surface dont l'équation est

$$F = 0.$$

Envisageons, dans les équations (1), x_1, x_2, x_3, x_4 comme les coordonnées d'un point de l'espace; ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 comme les coordonnées d'un autre point.

Les équations (1) définiront alors une *relation homologique* entre deux points de l'espace, de telle sorte que la connaissance de l'un de ces points puisse permettre de déterminer l'autre. Le point $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ sera le transformé du point (x_1, x_2, x_3, x_4) par la transformation T; on appellera de même transformée d'une courbe ou d'une surface le lieu des transformées de tous les points de cette courbe ou de cette surface.

Il est clair :

1° Que les transformées d'une droite ou d'un plan sont une droite ou un plan;

2° Que la transformée de la surface $F = 0$ est la surface $F.T = 0$.

Nous disons que T reproduit un point, une droite ou un plan, une courbe ou une surface, quand ce point, cette droite, ce plan, cette courbe et cette surface sont leurs propres transformées.

Nous dirons que T reproduit la forme F quand on aura identiquement

$$F.T = F.$$

Il faut remarquer que T peut reproduire la surface $F = 0$ sans reproduire la forme F; c'est ce qui arrivera quand on aura identiquement

$$F.T = \alpha F$$

(α étant une constante différente de 1).

Supposons que l'on change le triangle ou le tétraèdre de référence, si $x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ sont les anciennes coordonnées de deux points m et m'; si $y_1, y_2, y_3, y_4, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ sont les coordonnées nouvelles de ces deux mêmes points, on aura entre ces diverses quantités des relations de la forme

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 y_3 + d_1 y_4, \\ x_2 = a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3 + d_2 y_4, \\ x_3 = a_3 y_1 + b_3 y_2 + c_3 y_3 + d_3 y_4, \\ x_4 = a_4 y_1 + b_4 y_2 + c_4 y_3 + d_4 y_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \xi_1 = a_1 \eta_1 + b_1 \eta_2 + c_1 \eta_3 + d_1 \eta_4, \\ \xi_2 = a_2 \eta_1 + b_2 \eta_2 + c_2 \eta_3 + d_2 \eta_4, \\ \xi_3 = a_3 \eta_1 + b_3 \eta_2 + c_3 \eta_3 + d_3 \eta_4, \\ \xi_4 = a_4 \eta_1 + b_4 \eta_2 + c_4 \eta_3 + d_4 \eta_4. \end{cases}$$

Soit S la transformation linéaire

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix};$$

cette substitution définira le changement de coordonnées que l'on vient d'effectuer.

Il es tclair que la courbe ou la surface qui, dans l'ancien système de coordonnées, avait pour équation

$$F = 0$$

aura pour équation nouvelle

$$F.S = 0.$$

Nous dirons que le changement de coordonnées défini par la substitution S transforme F en F.S.

Supposons maintenant qu'on élimine les x et les ξ entre les équations (1) et (2), puis qu'on résolve les quatre équations restantes par rapport aux y; y_1, y_2, y_3, y_4 seront alors exprimés en fonctions de η_1, η_2, η_3 et η_4 par quatre équations de la forme

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1\eta_1 + B_1\eta_2 + C_1\eta_3 + D_1\eta_4, \\ y_2 &= A_2\eta_1 + B_2\eta_2 + C_2\eta_3 + D_2\eta_4, \\ y_3 &= A_3\eta_1 + B_3\eta_2 + C_3\eta_3 + D_3\eta_4, \\ y_4 &= A_4\eta_1 + B_4\eta_2 + C_4\eta_3 + D_4\eta_4. \end{aligned}$$

La substitution

$$\Sigma = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}$$

s'appellera la transformée de T par le changement de coordonnées S. Il est clair d'ailleurs que

$$\Sigma = S^{-1}.T.S.$$

Par conséquent, si T reproduit la forme F, Σ reproduira la forme

$$F.S,$$

car

$$F.S.\Sigma = F.S.S^{-1}.T.S = F.T.S = F.S.$$

III. — Classification des transformations.

Soit la transformation

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix};$$

nous dirons qu'elle est canonique si l'on a

$$\beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = \gamma_2 = \delta_2 = \delta_3 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \beta_3 = \beta_4 = \gamma_4 = 0.$$

Envisageons l'équation

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - \lambda & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 - \lambda & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

La considération des racines de cette équation nous conduira à classer les transformations T en quatre catégories.

T sera de la première catégorie si les racines de l'équation (3) sont toutes distinctes et si de plus les puissances $m^{\text{ièmes}}$ des racines de cette équation sont également distinctes, m étant un nombre entier réel quelconque.

T sera de la deuxième catégorie si les racines de l'équation (3) sont distinctes; mais, si leurs puissances $m^{\text{ièmes}}$ ne le sont pas, m étant un nombre entier quelconque, par exemple, si les racines de l'équation (3) sont 1, — 1, 2 et 3, T sera de la deuxième catégorie, parce que ces racines sont distinctes, mais que leurs carrés, qui sont 1, 1, 4 et 9, ne sont pas tous différents entre eux.

T sera de la troisième catégorie si les racines de l'équation (3) ne sont pas toutes distinctes, mais si T peut être regardé comme une puissance entière d'une transformation de la deuxième catégorie.

Enfin T sera de la quatrième catégorie si les racines de l'équation (3) ne

sont pas toutes distinctes et si, de plus, T ne peut pas être regardé comme une puissance entière d'une transformation de la deuxième catégorie.

Supposons que l'on se propose de rechercher les plans reproductibles par la transformation T.

Soit

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

un tel plan ; on devra avoir

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + u_3\alpha_3 + u_4\alpha_4}{u_1} = \dfrac{u_1\beta_1 + u_2\beta_2 + u_3\beta_3 + u_4\beta_4}{u_2} \\ = \dfrac{u_1\gamma_1 + u_2\gamma_2 + u_3\gamma_3 + u_4\gamma_4}{u_3} = \dfrac{u_1\delta_1 + u_2\delta_2 + u_3\delta_3 + u_4\delta_4}{u_4} = \lambda. \end{cases}$$

Il est clair que λ devra satisfaire à l'équation (3), et que, réciproquement, si l'on égale, dans les équations (4), λ à l'une des racines de l'équation (4), ces équations donneront pour les u au moins un système de valeurs et définiront par conséquent au moins un plan reproductible par la transformation F.

Supposons que T soit de la première ou de la deuxième catégorie, c'est-à-dire que l'équation (3) ait quatre racines distinctes, λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4. Il y aura alors quatre plans reproductibles par T.

Imaginons que l'on fasse un changement de coordonnées Σ en prenant pour nouveau tétraèdre de référence le tétraèdre formé par ces quatre plans. Il est clair que la transformée de T par Σ sera

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{vmatrix},$$

et sera par conséquent canonique, et nous l'écrirons quelquefois, pour abréger, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

Il suit de là que T est de la première ou de la deuxième catégorie ; on peut choisir Σ de telle sorte que

$$\Sigma^{-1}\mathrm{T}.\Sigma$$

soit canonique.

Je dis qu'il en est de même si T est de la troisième catégorie; en effet, dans ce cas, on pourra poser

$$T = \tau^m,$$

τ étant de la deuxième catégorie et m étant un entier positif; soit, pour fixer les idées,

$$m = 3;$$

on aura

$$T = \tau^3 = \tau.\Sigma.\Sigma^{-1}.\tau.\Sigma.\Sigma^{-1}\tau,$$

d'où

$$\Sigma^{-1}.T.\Sigma = (\Sigma^{-1}.\tau.\Sigma)^3.$$

Si donc $\Sigma^{-1}\tau\Sigma$ est canonique, $\Sigma^{-1}T.\Sigma$ le sera également.

Les mêmes considérations vont nous permettre de définir les puissances entières, fractionnaires, incommensurables ou imaginaires d'une transformation de l'une des trois premières catégories.

En effet, soit d'abord une substitution T canonique

$$T = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{vmatrix} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4).$$

Soient μ_1 l'une des valeurs du logarithme de λ_1, μ_2, μ_3, μ_4 une des valeurs des logarithmes de λ_2, λ_3, λ_4; T^α sera, par définition, la substitution

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha\mu_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha\mu_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha\mu_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\alpha\mu_4} \end{vmatrix} = (e^{\alpha\mu_1}, e^{\alpha\mu_2}, e^{\alpha\mu_3}, e^{\alpha\mu_4}).$$

Supposons ensuite une substitution non canonique; on pourra l'écrire sous la forme

$$\Sigma^{-1}.T.\Sigma,$$

T étant canonique, et sa puissance $\alpha^{\text{ième}}$ sera, par définition,

$$\Sigma^{-1}.T^{\alpha}.\Sigma.$$

Les transformations ternaires de la troisième catégorie se classent en deux types :

$$\textit{Type } A\ldots\ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix}, \qquad \textit{Type } B\ldots\ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix};$$

mais nous devons remarquer que la substitution *unitaire* du type B est la substitution *unité*, c'est-à-dire celle qui laisse toutes les formes inaltérées.

A ces deux types correspondent deux autres types appartenant à la seconde catégorie :

$$\textit{Type } A'\ldots\ldots (\alpha, \lambda_1\alpha, \beta), \qquad \textit{Type } B'\ldots\ldots (\alpha, \lambda_1\alpha, \lambda_2\alpha),$$

λ_1 et λ_2 étant des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

On trouve de même pour les transformations quaternaires de la troisième catégorie quatre types :

$$\textit{Type } C\ldots\ldots (\alpha, \alpha, \beta, \gamma), \qquad \textit{Type } D\ldots\ldots (\alpha, \alpha, \beta, \beta),$$
$$\textit{Type } E\ldots\ldots (\alpha, \alpha, \alpha, \beta), \qquad \textit{Type } F\ldots\ldots (\alpha, \alpha, \alpha, \alpha),$$

auxquels correspondent, pour la deuxième catégorie, quatre autres types :

$$\textit{Type } C'\ldots\ldots (\alpha, \lambda_1\alpha, \beta, \gamma), \qquad \textit{Type } D'\ldots\ldots (\alpha, \lambda_1\alpha, \beta, \lambda_2\beta),$$
$$\textit{Type } E'\ldots\ldots (\alpha, \lambda_1\alpha, \lambda_2\alpha, \beta), \qquad \textit{Type } F'\ldots\ldots (\alpha, \lambda_1\alpha, \lambda_2\alpha, \lambda_3\alpha),$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

La question qui se pose est de trouver les points, les droites et les plans reproductibles par la transformation T et de discuter complètement le problème, mais il suffira pour notre objet de faire cette discussion pour

les transformations ternaires, les résultats devant s'étendre aisément aux transformations quaternaires.

Appelons *triangle principal* le triangle de référence auquel il faut rapporter les équations de T pour réduire cette transformation à la forme canonique; on verra aisément :

1° Que si T est de la première ou de la deuxième catégorie, les seuls points ou droites reproductibles sont les sommets et les côtés du triangle principal;

2° Que si T est de la troisième catégorie et du type A, les points reproductibles sont le sommet $x_1 = x_2 = 0$, et les points du côté $x_3 = 0$, pendant que les droites reproductibles sont la droite $x_3 = 0$ et les droites qui passent par le sommet $x_1 = x_2 = 0$;

3° Que si T est de la troisième catégorie et du type B, tous les points et toutes les droites sont reproductibles.

Supposons que T soit de la première catégorie : aucune de ses puissances entières ne sera de la troisième catégorie, d'où il suit que, si τ_0 est un point quelconque non reproductible, si τ_1 est le transformé de τ_0, τ_2 celui de τ_1, etc., il ne pourra jamais se faire que τ_m se confonde avec τ_0. Donc :

Si T *est de la première catégorie, sauf les sommets du triangle principal* (ou, dans le cas des transformations quaternaires, les sommets du tétraèdre), *tous les points ont une infinité de transformés successifs.*

Passons maintenant aux transformations de la quatrième catégorie; on ne pourra jamais les réduire à la forme canonique, mais on peut choisir Σ de façon à ramener $\Sigma^{-1}T\Sigma$ à sa forme la plus simple.

Ainsi les transformations ternaires de la quatrième catégorie se partageront en deux types, dont je donne ici les formes les plus simples :

$$\textit{Type } A_1 \ldots \quad \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha \end{vmatrix}, \qquad \textit{Type } B_1 \ldots \quad \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \delta & \alpha \end{vmatrix}.$$

Les transformations quaternaires se diviseront en quatre types :

$$\textit{Type } C_1 \ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \gamma \end{vmatrix}, \quad \textit{Type } D_1 \ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \beta \end{vmatrix},$$

$$\textit{Type } E_1 \ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \beta & 0 \\ 0 & \delta & \varepsilon & \beta \end{vmatrix}, \quad \textit{Type } F_1 \ldots \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & \alpha & 0 \\ \varepsilon & \zeta & \theta & \alpha \end{vmatrix}.$$

On voit aisément que les seuls points reproductibles sont les suivants :

Type A_1 . . . $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$,

Type B_1 . . . $x_1 = x_2 = 0$,

Type C_1 . . . $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Type D_1 . . . $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = x_3 = x_4 = 0$,

Type E_1 . . . $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$,

Type F_1 . . . $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Il ne peut y avoir d'exception que pour les types A_1, C_1, D_1, E_1, si $\alpha = \beta$.

Or toute puissance entière d'une transformation de quatrième catégorie est elle-même de cette catégorie.

Donc, si T *est de la quatrième catégorie, sauf un nombre fini de points reproductibles, tous les points ont une infinité de transformés successifs.*

Il ne peut y avoir d'exception que pour les types A_1, C_1, D_1, E_1 si $\alpha^m = \beta^m$, et alors le lieu des points qui n'ont pas une infinité de transformés successifs est une droite ou un plan.

IV. — Classification des formes.

Les formes cubiques ternaires représentent des courbes du troisième ordre; nous les diviserons en sept familles.

Les quatre premières familles comprendront des formes non décomposables en facteurs, qui représentent des courbes indécomposables.

Parmi elles, *les deux premières familles* comprendront des formes à discriminant différent de o qui représentent des courbes sans point double, c'est-à-dire des courbes de troisième ordre et de sixième classe.

Les formes peuvent toujours s'écrire de la façon suivante :

$$\alpha XYZ + X^3 + Y^3 + Z^3,$$

X, Y, Z étant des formes linéaires en x_1, x_2, x_3; de sorte que la forme canonique qui servira à définir chaque type ou chaque sous-type de ces deux familles sera

$$(5) \qquad 6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3 + z^3).$$

On démontre, en effet (*voir* un Mémoire de M. Hesse, inséré dans le tome **28** du *Journal de Crelle*), qu'une courbe C du troisième ordre et de le sixième classe a neuf points d'inflexion dont trois toujours réels et six toujours imaginaires. Ces neuf points d'inflexion se distribuent de quatre manières différentes sur trois droites, et ils se distribuent d'une manière et d'une seule sur trois droites réelles. Si l'on prend ces trois droites pour former le triangle de référence, l'équation de la courbe C sera de la forme

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3 + z^3) = 0,$$

de telle sorte que, si F est la forme qui représente la courbe C, on pourra toujours poser

$$F = 6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3 + z^3)\Sigma,$$

Σ étant une substitution à coefficients réels.

Il suit de là que toute forme cubique ternaire de la première ou de la deuxième famille est réellement équivalente à une forme telle que (5).

Maintenant, parmi ces formes, je distinguerai (et l'on verra plus loin comment j'y suis conduit) :

1° *Une première famille,* composée des formes qui ne sont pas décomposables en une somme de trois cubes;

2° *Une deuxième famille,* composée des formes qui sont décomposables en une somme de trois cubes.

Les formes de la *troisième famille* auront le discriminant nul, mais tous leurs invariants ne seront pas nuls à la fois; elles représenteront des courbes du troisième ordre et de la quatrième classe.

On démontre que ces courbes ont trois points d'inflexion dont un seul est réel, et que ces trois points sont sur une même droite réelle.

Si l'on prend pour former le triangle de référence cette droite et les deux tangentes au point double, on trouve que l'équation de la courbe peut être mise sous la forme

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3) = 0.$$

On en conclut que, si F est une forme de la troisième, elle sera algébriquement équivalente à l'une des formes

$$(6) \qquad 6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3),$$

ou par conséquent qu'elle sera réellement équivalente à l'une des formes

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3),$$

ou à l'une des formes

$$(7) \qquad 3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z + \beta x^3 - 3\beta xy^2,$$

selon que les tangentes au point double de la courbe C sont réelles ou bien imaginaires conjuguées.

Les formes de la *quatrième famille* seront celles dont tous les invariants sont nuls. Elles présenteront une courbe du troisième ordre avec un point de rebroussement, et cette courbe sera de troisième classe.

Ces courbes ont un seul point d'inflexion, qui est toujours réel. Prenons, pour former le triangle de référence, la droite qui joint le point d'inflexion au point de rebroussement et les deux tangentes d'inflexion et de rebroussement. L'équation de la courbe pourra s'écrire

$$z^3 + xy^2 = 0,$$

de sorte que toute forme de la quatrième famille sera réellement équivalente à la canonique

$$(8) \qquad z^3 + xy^2.$$

Les *trois dernières famille* comprendront des formes décomposables en facteurs.

Les formes de la *cinquième famille* représenteront une conique S et une droite D non tangentes entre elles.

Prenons, pour former le triangle de référence, la droite D et les tangentes à S aux points où cette conique rencontre D ; l'équation de la courbe décomposable pourra s'écrire

$$\alpha z(z^2 + \beta xy) = 0,$$

de sorte que les formes de la cinquième famille seront algébriquement équivalentes à la canonique

$$(9) \qquad \beta z^3 + 6\alpha xyz,$$

et réellement équivalentes à la canonique

$$\beta z^3 + 6\alpha xyz,$$

ou à la canonique

$$(10) \qquad \beta z^3 + 3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z,$$

selon que la droite D rencontrera ou non S.

Les formes de la *sixième famille* représenteront une droite D et une conique S, tangentes entre elles. Prenons pour triangle de réference la

droite D, une droite H passant par le point de contact de D et de S et la tangente à S au point où cette conique rencontre H.

L'équation de la courbe décomposable pourra s'écrire

$$\alpha y(z^2 + \beta xy) = 0,$$

de sorte que les formes de la sixième famille seront réellement équivalentes à la canonique

$$(11) \qquad 3\alpha yz^2 + 3\beta xy^2.$$

Enfin la *septième famille* se composera des formes décomposables en facteurs linéaires, dont M. Hermite s'est occupé.

Avant d'aller plus loin, il y a lieu de dire quelques mots des principaux invariants et covariants de ces diverses canoniques.

Nous désignerons, suivant l'usage, par $\Delta(f)$ le hessien de la forme f.

Soit à calculer

$$\Delta(6\alpha xyz + \beta x^3 + \gamma y^3 + \delta z^3);$$

nous trouverons aisément

$$36\Delta = \begin{vmatrix} 6\alpha x & 6\alpha z & 6\alpha y \\ 6\alpha z & 6\gamma y & 6\alpha x \\ 6\alpha y & 6\alpha x & 6\alpha z \end{vmatrix},$$

d'où

$$(12) \qquad \Delta = 6(\beta\gamma\delta + 2\alpha^3)xyz - 6\alpha^2\beta x^3 = -6\alpha^2\gamma y^3 - 6\alpha^2\delta z^3.$$

Calculons de même

$$\Delta(\alpha z + 3\beta xy^2);$$

il vient

$$36\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 6\beta y & 0 \\ 6\beta y & 6\beta x & 0 \\ 0 & 0 & 6\alpha z \end{vmatrix},$$

d'où

$$\Delta = -6\alpha\beta^2 zy^2.$$

Si l'on veut avoir

$$\Delta(3\alpha y z^2 + 3\beta x y^2),$$

on trouve

$$36\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 6\beta y & 0 \\ 6\beta y & 6\beta x & 6\alpha z \\ 0 & 6\alpha z & 6\alpha y \end{vmatrix},$$

ou

$$\Delta = -6\alpha\beta^2 y.$$

M. Aronhold a défini deux invariants des formes cubiques ternaires qu'il a appelés S et T (*Journal de Crelle,* tome 39, p. 152) et que je vais calculer pour les formes qui nous occupent.

Pour faire ce calcul, je rappelle la définition que Clebsch a donnée d'une opération qu'il appelle l'opération δ (*Mathematische Annalen,* t. VI, p. 449).

Soit $\Theta(f)$ un invariant ou un covariant quelconque de la forme f; on convient d'écrire

$$\delta[\Theta(f)] = \frac{d}{d\lambda}\{\Theta[f + \lambda\Delta(f)]\} \text{ pour } \lambda = 0.$$

M. Clebsch arrive aux deux formules suivantes :

$$\delta[\Delta(f)] = \tfrac{1}{2}\mathrm{S}.f, \quad \tfrac{1}{4}\delta(\mathrm{S}) = \mathrm{T}$$

(*Mathematische Annalen,* t. VI, p. 450 et 451).

Mais si l'on remarque que ce que M. Clebsch appelle S et T, c'est ce que M. Aronhold appelle 6S et 6T, on sera conduit à écrire

$$\delta[\Delta(f)] = 3\mathrm{S}.f, \quad \tfrac{1}{4}\delta(\mathrm{S}) = \mathrm{T}.$$

Or, en se bornant aux trois canoniques

$$6\alpha xyz + \beta x^3 + \gamma y^3 + \delta z^3, \quad \alpha z^3 + 3\beta x y^2, \quad 3\alpha y z^2 + 3\beta x y^2,$$

on trouve sans peine, pour la première,

$$\delta\Delta = 36\alpha^2(\beta\gamma\delta + 2\alpha^3)xyz - 12\alpha(\beta x^3 + \gamma y^3 + \delta z^3)(\beta\gamma\delta + 2\alpha^3),$$
$$+ 6\gamma\delta(-2\alpha^2\beta)xyz - 6\alpha^2(-6\alpha^2\beta)x^3,$$
$$+ 6\beta\delta(-6\alpha^2\gamma)xyz - 6\alpha^2(-6\alpha^2\gamma)y^3,$$
$$+ 6\beta\gamma(-6\alpha^2\delta)xyz - 6\alpha^2(-6\alpha^2\delta)z^3,$$

ou

$$\delta\Delta = 6\alpha xyz(6\alpha\beta\gamma\delta + 12\alpha^4 - 6\alpha\beta\gamma\delta - 6\alpha\beta\gamma\delta - 6\alpha\beta\gamma\delta),$$
$$+ \beta x^3(36\alpha^4 - 24\alpha^4 - 12\alpha\beta\gamma\delta),$$
$$+ \gamma y^3(36\alpha^4 - 24\alpha^4 - 12\alpha\beta\gamma\delta),$$
$$+ \delta z^3(36\alpha^4 - 24\alpha^4 - 12\alpha\beta\gamma\delta);$$

ou

$$\delta\Delta = (6\alpha xyz + \beta x^3 + \gamma y^3 + \delta z^3)(12\alpha^4 - 12\alpha\beta\gamma\delta),$$

ou enfin

$$S = 4\alpha^4 - 4\alpha\beta\delta\gamma,$$
$$\tfrac{1}{2}\delta S = 8\alpha^3(\beta\gamma\delta + 2\alpha^3) - 2\beta\gamma\delta(\beta\gamma\delta + 2\alpha^3)$$
$$- 2\alpha\gamma\delta(-6\alpha^2\beta) - 2\alpha\beta\delta(-6\alpha^2\gamma) - 2\alpha\beta\gamma(-6\alpha^2\delta),$$

ou

$$\tfrac{1}{2}\delta S = 8\alpha^3\beta\gamma\delta + 16\alpha^6 - 2\beta^2\gamma^2\delta^2 - 4\alpha^3\beta\gamma\delta$$
$$+ 12\alpha^3\beta\gamma\delta + 12\alpha^3\beta\gamma\delta + 12\alpha^3\beta\gamma\delta,$$

ou

$$\tfrac{1}{2}\delta S = 16\alpha^6 + 40\alpha^3\beta\gamma\delta - 2\beta^2\gamma^2\delta^2,$$

d'où

$$T = \tfrac{1}{4}\delta S = 8\alpha^6 + 20\alpha^3\beta\gamma\delta - \beta^2\gamma^2\delta^2.$$

Il est facile de voir que les formes

$$\alpha z^3 + 3\beta xy^2, \quad 3\alpha xy^2 + 3\beta xy^2$$

ont pour invariants

$$S = 0, \quad T = 0.$$

Posons en effet

(13) $$z = z_1, \quad x = \tfrac{1}{4}x_1, \quad y = 2y_1;$$

la première des formes devient

$$\alpha z_1^3 + 3\beta x_1 y_1^2,$$

et est par conséquent reproduite.

Or les équations (13) définissent une transformation

$$H = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

dont le déterminant est $\frac{1}{2}$; on doit donc avoir

$$S[f.H] = \frac{1}{2^4} S[f],$$

$$T[f.H] = \frac{1}{2^6} T[f].$$

Or les deux formes f et $f.H$ sont identiques. Donc

$$S[f.H] = S[f].$$
$$T[f.H] = T[f];$$

on déduit de là

$$S(f) = T(f) = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Une démonstration analogue est applicable à la forme

$$3\alpha y z^2 + 3\beta x y^2,$$

qui se reproduit quand on pose

$$z = 2z, \quad y = \tfrac{1}{4}y, \quad x = 16x.$$

Appliquons maintenant la formule (12) aux formes (5), (6) et (9), en faisant successivement

$$\beta = \gamma = \delta,$$
$$\beta = \gamma, \quad \delta = 0,$$
$$\gamma = \delta = 0,$$

Remarquons ensuite que, si K est la substitution linéaire

$$z = \zeta, \quad x = (\xi + i\eta)\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = (\xi - i\eta)\frac{1}{\sqrt{2}},$$

de telle sorte que

$$K = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

Le déterminant de K sera égal à $-i$; or on aura identiquement

$$(6\alpha xyz + \beta x^3 + \beta y^3)K = 3\alpha\xi^2\zeta + 3\alpha\eta^2\zeta + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\xi^3 - 3\frac{\beta}{\sqrt{2}}\xi\eta^2,$$

d'où

$$(14) \quad \begin{cases} \Delta\left(3\alpha\xi^2\zeta + 3\alpha\eta^2\zeta + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\xi^3 - 3\frac{\beta}{\sqrt{2}}\xi\eta^2\right) \\ \qquad = (-i)^3[\Delta(6\alpha xyz + \beta x^3 + \beta y^3)K], \end{cases}$$

$$S\left(3\alpha\xi^2\zeta + 3\alpha\eta^2\zeta + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\xi^3 - 3\frac{\beta}{\sqrt{2}}\xi\eta^2\right) = (-i)^4\, S(6\alpha xyz + \beta x^3 + \beta y^3),$$

$$T\left(3\alpha\xi^2\zeta + 3\alpha\eta^2\zeta + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\xi^3 - 3\frac{\beta}{\sqrt{2}}\xi\eta^2\right) = (-i)^6\, T(6\alpha xyz + \beta x^3 + \beta y^3).$$

De même, soit

$$f = \beta z^3 + 6\alpha xyz,$$

$$\varphi = \beta\zeta^3 + 3\alpha\xi^2\zeta + 3\alpha\eta^2\zeta;$$

on aura identiquement

$$\varphi = f.K,$$

d'où

$$\Delta(\varphi) = (-i)^3[\Delta(f).K], \quad S(\varphi) = (-i)^4 S(f), \quad T(\varphi) = (-i)^6 T(f).$$

On arrive ainsi aisément aux résultats suivants.

Formes de la première famille.

La canonique

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3 + z^3) \tag{5}$$

donne

$$\Delta = 6(\beta^3 + 2\alpha^3)xyz - 6\alpha^2\beta(x^3 + y^3 + z^3),$$
$$S = 4\alpha(\alpha^3 - \beta^3), \quad T = 8\alpha^6 + 20\alpha^3\beta^3 - \beta^6.$$

Formes de la deuxième famille.

La canonique étant la même, les covariants et invariants seront les mêmes; nous devrons toutefois remarquer que $S = 0$ (Aronhold, *Journ. de Crelle,* t. **39**, p. 153).

Formes de la troisième famille.

La canonique

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3) \tag{6}$$

donne

$$\Delta = 12\alpha^3 xyz - 6\alpha^2\beta(x^3 + y^3),$$
$$S = 4\alpha^4, \quad T = 8\alpha^6.$$

La canonique

$$3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z + \beta x^3 - 3\beta xy^2 \tag{7}$$

donne, en vertu des formules (14),

$$-\Delta = 6\alpha^3 x^2 z + 6\alpha^8 y^2 z - 6\alpha^2\beta x^3 + 18\alpha^2\beta xy^2,$$
$$S = 4\alpha^4, \quad T = -8\alpha^6.$$

Nous devons appeler l'attention sur une propriété extrêmement remarquable de S et de T : c'est que S est un carré parfait et T un cube parfait ; car

$$T^2 - S^3 = 0.$$

Nous poserons

$$\sqrt{S} = \sqrt[3]{T} = \rho,$$

et il est clair que, dans le cas qui nous occupe, ρ est égal à $2\alpha^2$ pour la canonique (6) et à $-2\alpha^2$ pour la canonique (7).

On voit sans peine que l'on a

$$3\rho f + \Delta = 30\alpha^3 xyz.$$

Formes de la quatrième famille.

La canonique

(8) $$\alpha z^3 + 3\beta xy^2$$

donne

$$\Delta = -6\alpha\beta^2 zy^2,$$
$$S = 0, \quad T = 0.$$

Formes de la cinquième famille.

La canonique

(9) $$6\alpha xyz + \beta z^3$$

donne

$$\Delta = 12\alpha^3 xyz - 6\alpha^2\beta z^3,$$
$$S = 4\alpha^4, \quad T = 8\alpha^6.$$

La canonique

(10) $$\beta z^3 + 3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z$$

donne, en vertu des formules (14) et suivantes,

$$\Delta = 6\alpha^2\beta z^3 - 6\alpha^3 x^2 z - 6\alpha^3 y^2 z,$$
$$S = 4\alpha^4, \quad T = -8\alpha^6.$$

Formes de la sixième famille.

La canonique

$$3\alpha y z^2 + 3\beta x y^2 \tag{11}$$

donne

$$\Delta = -6\alpha\beta^2 y^3,$$

et

$$S = 0, \quad T = 0.$$

V. — Transformations semblables.

Nous allons maintenant nous occuper de rechercher les transformations qui reproduisent une forme donnée; mais posons d'abord le problème de la manière suivante :

Étant donnée une transformation linéaire T, *trouver les formes qu'elle reproduit.*

Nous ne supposons pas ici que les coefficients de T soient entiers, de sorte que le problème qui nous occupe en ce moment est purement algébrique.

1° *Transformations semblables de la première catégorie.*

Si la transformation T est de la première catégorie, elle pourra s'écrire

$$\Sigma^{-1}.S.\Sigma,$$

S étant canonique.

Si la forme F est reproductible par S, la forme $F.\Sigma$ sera reproductible par T; donc, pour trouver toutes les formes reproductibles par T, il suffit de trouver toutes les formes reproductibles par S et de leur appliquer la transformation Σ

Soit

$$S = \left[e^{\mu_1+i\nu_1}, e^{\mu_2+i\nu_2}, e^{\mu_3+i\nu_3}, e^{\mu_4+i\nu_4}\right].$$

Nous pourrons poser

$$S = S_1 . S_2,$$

ou

$$S_1 = [e^{\mu_1}, e^{\mu_2}, e^{\mu_3}, e^{\mu_4}],$$
$$S_2 = [e^{i\nu_1}, e^{i\nu_2}, e^{i\nu_3}, e^{i\nu_4}].$$

Soit une forme F, reproductible par S, et soit

$$\varphi = A x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} x_4^{m_4}$$

un de ses termes; par la transformation S ce terme devient

$$A \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \xi_3^{m_3} \xi_4^{m_4} e^{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \mu_3 m_3 + \mu_4 m_4} e^{i(\nu_1 m_1 + \nu_2 m_2 + \nu_3 m_3 + \nu_4 m_4)}.$$

On doit donc avoir

$$(15) \quad \begin{cases} \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \mu_3 m_3 + \mu_4 m_4 = 0, \\ \nu_1 m_1 + \nu_2 m_2 + \nu_3 m_3 + \nu_4 m_4 \equiv 0 \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

La première des équations (15) montre que F est reproductible par S_1, la seconde que F est reproductible par S_2.

Supposons d'abord

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 0.$$

Alors S se réduit à S_1, et il suffit, pour trouver toutes les formes F, de trouver toutes les formes reproductibles par S_1. Nous dirons alors que T a sa canonique réelle.

On a, dans ce cas,

$$x_1 \frac{d\varphi}{dx_1} = m_1 \varphi, \quad x_2 \frac{d\varphi}{dx_2} = m_2 \varphi, \quad x_3 \frac{d\varphi}{dx_3} = m_3 \varphi, \quad x_4 \frac{d\varphi}{dx_4} = m_4 \varphi$$

ou

$$\mu_1 x_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + \mu_2 x_2 \frac{d\varphi}{dx_2} + \mu_3 x_3 \frac{d\varphi}{dx_3} + \mu_4 x_4 \frac{d\varphi}{dx_4}$$
$$= (m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2 + m_3 \mu_3 + m_4 \mu_4) \varphi = 0,$$

et, comme cela a lieu pour tous les termes de F, on aura, en appelant

p_1, p_2, p_3, p_4 les dérivées de F par rapport à x_1, x_2, x_3, x_4,

$$(16) \qquad \mu_1 x_1 p_1 + \mu_2 x_2 p_2 + \mu_3 x_3 p_3 + \mu_4 x_4 p_4 = 0.$$

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que F soit reproductible par la transformation S, c'est que cette forme satisfasse à l'équation différentielle (16).

Supposons maintenant que l'on n'ait pas à la fois

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 0;$$

la condition précédente reste nécessaire, mais n'est plus suffisante.

Alors, si la transformation T est réelle, ce que nous supposerons, on aura, par exemple,

$$\nu_2 = -\nu_1, \quad \nu_4 = -\nu_3,$$

et, par conséquent,

$$(17) \qquad \nu_1(m_1 - m_2) + \nu_3(m_3 - m_4) \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

1° Si ν_1 et ν_3 sont commensurables avec 2π, la transformation S_2 est de la deuxième catégorie.

2° Si ν_1 et ν_3 ne sont pas commensurables avec 2π, l'équation (17) ne pourra être satisfaite, si elle peut l'être, que si un nombre entier égale $\frac{m_1 - m_2}{h_1} = \frac{m_3 - m_4}{h_2}$, h_1 et h_2 étant deux entiers déterminés; on a donc

$$\frac{2\pi}{h_1}(m_1 - m_2) \equiv 0 \pmod{2\pi}, \qquad \frac{2\pi}{h_2}(m_3 - m_4) \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Donc F est reproductible par les transformations

$$\left(e^{\frac{2i\pi}{h_1}},\ e^{-\frac{2i\pi}{h_1}},\ 1,\ 1\right),$$

et

$$\left(1,\ 1,\ e^{\frac{2i\pi}{h_2}},\ e^{-\frac{2i\pi}{h_2}}\right),$$

qui sont de la deuxième catégorie.

3° Il peut arriver enfin qu'on ne puisse satisfaire à l'équation (17), et alors il n'y a pas de forme reproductible par S.

S'il y en a, on vient de voir que ce sont les formes qui satisfont à l'équation (16) et qui, en même temps, sont reproductibles par une ou deux substitutions de la deuxième catégorie.

Quelles sont maintenant les formes reproductibles par T. Pour les trouver, il suffit d'appliquer la substitution Σ aux formes reproductibles par S. Soient y_1, y_2, y_3, y_4 les nouvelles variables, q_1, q_2, q_3, q_4 les dérivées de F par rapport à ces nouvelles variables; les y seront liés aux x et les q aux p par des équations linéaires; de sorte que, par la transformation Σ, l'équation (16) deviendra

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} & q_1(a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 y_3 + d_1 y_4) \\ & + q_2(a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3 + d_2 y_4) \\ & + q_3(a_3 y_1 + b_3 y_2 + c_3 y_3 + d_3 y_4) \\ & + q_4(a_4 y_1 + b_4 y_2 + c_4 y_3 + d_4 y_4) = 0. \end{aligned}\right.$$

Donc les formes qui sont reproductibles par T devront satisfaire à l'équation (18). Si T a sa canonique réelle, cette condition sera suffisante.

Si T n'a pas sa canonique réelle, il pourra se présenter deux cas.

Dans le premier cas, les formes reproductibles par T devront en outre être reproductibles par une ou deux substitutions de la deuxième catégorie.

Dans le second cas, il n'y aura pas de forme reproductible par T.

2° *Formation des formes reproductibles.*

Proposons-nous de former toutes les formes cubiques binaires, ternaires et quaternaires reproductibles par une transformation canonique réelle de la première catégorie, ainsi que les transformations correspondantes. Voici quel est le procédé que nous emploierons.

Nous choisirons dans la forme cubique ternaire ou quaternaire la plus

générale, deux quelconques des termes pour les formes ternaires, trois quelconques des termes pour les formes quaternaires, et nous formerons, de cette manière, toutes les combinaisons possibles, en excluant toutefois :

1° Les combinaisons qui conduiraient à une forme binaire (s'il s'agit des formes ternaires) ou à une forme ternaire (s'il s'agit des formes quaternaires);

2° Les combinaisons qu'on pourrait déduire des combinaisons déjà obtenues par des permutations entre les variables;

3° Les combinaisons qui conduiraient à une forme reproductible par une transformation de la deuxième ou de la troisième catégorie.

Voici comment on pourra reconnaître ces dernières combinaisons.

Supposons que la transformation canonique s'écrive

$$S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4).$$

Si, dans une combinaison, on trouve à la fois les deux term es

$$x_1^3 \quad \text{et} \quad x_2^3,$$

il est clair que la forme à laquelle conduit cette combinaison ne peut être reproductible par S que si

$$\alpha_1^3 = \alpha_2^3,$$

et alors S est de la deuxième catégorie.

De même, si l'on avait à la fois

$$x_1^2 x_4 \text{ et } x_2^2 x_4, \quad \text{ou} \quad x_1 x_4^2 \text{ et } x_2 x_4^2,$$

ou

$$x_1 x_3 x_4 \quad \text{et} \quad x_2 x_3 x_4,$$

il est clair que l'on devrait avoir

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 \quad \text{ou} \quad \alpha_1 = \alpha_2,$$

et que, par conséquent, S serait de la deuxième ou de la troisième catégorie.

Dans tous les cas, de pareilles combinaisons devraient être rejetées.

Dans ces conditions, voici le Tableau auquel on arrive : j'écris à gauche la forme reproductible et à droite la transformation correspondante ; seulement, pour abréger l'écriture, partout, au lieu de

$$(e^{\mu_1}, e^{\mu_2}, e^{\mu_3}, e^{\mu_4}),$$

j'écrirai

$$(\underline{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4}),$$

le trait placé en dessous ne permettant pas de confondre les deux notations.

On arrivera ainsi au Tableau suivant :

Formes binaires.

$$xy^2 \qquad (\underline{-2, 1}).$$

Formes ternaires.

$$z^3 + xy^2 \qquad (\underline{-2, \ 1, \ 0}),$$
$$z^3 + xyz \qquad (\underline{-1, \ 1, \ 0}),$$
$$yz^2 + xy^2 \qquad (\underline{4, -2, -1}).$$

Formes quaternaires.

$$t^3 + yz^2 + xy^2 \qquad (\underline{4, -2, \ 1, \ 0}),$$
$$t^3 + yz^2 + xyt \qquad (\underline{2, -2, \ 1, \ 0}),$$
$$t^3 + yz^2 + xzt \qquad (\underline{-1, -2, \ 1, \ 0}),$$
$$xy^2 + zt^2 + z^2y \qquad (\underline{-8, \ 4, -1, \ 1}),$$
$$xy^2 + z^2y + xzt \qquad (\underline{-4, \ 2, -1, \ 5}).$$

(Nous avons représenté, pour abréger, x_1, x_2, x_3, x_4 par x, y, z, t).

Il faudrait ajouter au Tableau les formes que l'on obtient en affectant chaque terme des formes précédentes d'un coefficient numérique quelconque et celles que l'on obtient en permutant les variables entre elles d'une façon quelconque. Il est clair, de plus, qu'une forme reproductible par une transformation de la première catégorie est reproductible par toutes les

puissances, entières, fractionnaires, ou incommensurables de cette trans formation.

Écrivons maintenant diverses formes quaternaires qui sont reproductibles par deux transformations canoniques, par les puissances de ces transformations et par les produits de ces puissances. Il est aisé de trouver toutes les formes qui satisfont à cette condition ; ce sont :

$$\begin{array}{lll} x^3+yzt & (\underline{0,\ 1,\ -1,\ 0}) & (\underline{0,\ 1,\ 0,\ -1}), \\ x^3+z^2t & (\underline{1,\ -2,\ 0,\ 0}) & (\underline{0,\ 0,\ 1,\ -2}), \\ x^2y+xzt & (\underline{1,\ -2,\ -1,\ 0}) & (\underline{1,\ -2,\ 0,\ -1}), \\ x^2y+yzt & (\underline{1,\ -2,\ 2,\ 0}) & (\underline{1,\ -2,\ 0,\ 2}). \end{array}$$

De ce qui précède, nous tirerons le résultat suivant :

Les formes cubiques ternaires reproductibles par une transformation de la première catégorie sont celles de la quatrième, de la cinquième, et celles de la sixième famille. (Il faudrait ajouter celles de la septième, qui ne figurent pas explicitement au Tableau, devant être regardées comme un cas particulier des formes de la cinquième famille.)

3° *Transformations semblables de la troisième catégorie.*

Soit

$$S = (\underline{\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4})$$

une transformation semblable de la troisième catégorie ; on devra avoir une relation d'égalité entre deux ou plusieurs des μ, sans quoi la transformation ne serait pas de la troisième catégorie.

Soit, pour fixer les idées,

$$\mu_1 = \mu_2.$$

Supposons, de plus, que μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 sont réels ; car, si cela n'avait pas lieu, on poserait

$$\mu_1 = \mu'_1 + i\mu''_1, \quad \mu_2 = \mu'_2 + i\mu''_2, \quad \mu_3 = \mu'_3 + i\mu''_3, \quad \mu_4 = \mu'_4 + i\mu''_4,$$

d'où

$$S = S_1 . S_2, \quad S_1 = (\underline{\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \mu'_4}), \quad S_2 = (\underline{\mu''_1, \mu''_2, \mu''_3, \mu''_4}),$$

et l'on démontrerait sans peine que toute forme productible par S est reproductible par S_1.

Si μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 sont réels, toute forme reproductible par S devra satisfaire à l'équation différentielle

$$\mu_1 x_1 p_1 + \mu_2 x_2 p_2 + \mu_3 x_3 p_3 + \mu_4 x_4 p_4 = 0.$$

Il est aisé d'ailleurs de trouver les formes reproductibles par

$$S = (\underline{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4}).$$

Il suffit, en effet, de construire toutes les formes en x_2, x_3, x_4, reproductibles par

$$(\underline{\mu_2, \mu_3, \mu_4}),$$

puis d'y remplacer x_2^m par une fonction homogène quelconque de degré m en x_1 et en x_2.

Appliquons cette règle, qui conduit évidemment au résultat, aux formes ternaires; quelles sont les formes cubiques ternaires reproductibles par

$$S = (\underline{\alpha, \alpha, \beta})?$$

Il faut chercher les formes binaires reproductibles par

$$(\underline{\alpha, \beta}).$$

Les seules formes binaires satisfaisant à cette condition sont

$$xy^2$$

(*voir* le Tableau des formes reproductibles).

Donc les seules formes ternaires reproductibles par S pourront s'écrire

$$axy^2 + 2bxyz + cxz^2,$$

et seront, par conséquent, décomposables en trois facteurs.

Il suit de là que les seules formes cubiques ternaires, reproductibles par une transformation de la troisième catégorie et du type A, sont les formes de la septième famille.

4° Transformations semblables de la deuxième catégorie.

Nous ne nous occuperons, dans ce qui suit, que des formes cubiques ternaires. Si une pareille forme est reproductible par une transformation de la deuxième catégorie et du type A′, elle sera reproductible également par toutes les puissances entières de cette substitution; elle le sera donc par une transformation de la troisième catégorie et du type A. Par conséquent, elle sera de la septième famille, et, en ce qui concerne les formes de cette famille, nous n'avons rien à ajouter aux travaux de M. Hermite.

Considérons maintenant une cubique ternaire, reproductible par une transformation de la deuxième catégorie et du type B′.

Si cette transformation est réelle, sa canonique sera d'une des trois formes

$$(\underline{i\nu_1,\ -i\nu_1,\ 0}),$$
$$(\underline{i\nu_1,\ -i\nu_1,\ i\pi}),$$
$$(\underline{0,\quad i\pi,\ 0}).$$

Si la canonique est de la première forme, et si $x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3}$ est un des termes de la cubique que cette canonique doit reproduire, on devra avoir

$$(\nu_1(m_1 - m_2) \equiv 0 \pmod{2\pi};$$

et, comme $m_1 - m_2$ ne peut être égal qu'à 0, à ± 1, à ± 2 ou à ± 3, on devra avoir

$$\nu_1 = \pi \quad \text{ou} \quad \nu_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad \nu_1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Soit d'abord

$$\nu_1 = \pi.$$

La congruence

$$\pi(m_1 - m_2) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

conduit aux solutions suivantes :

$$m_1 = 2,\quad m_2 = 0,\quad m_3 = 1,$$
$$m_1 = 1,\quad m_2 = 1,\quad m_3 = 1,$$
$$m_1 = 0,\quad m_2 = 2,\quad m_3 = 1,$$
$$m_1 = 0,\quad m_2 = 0,\quad m_3 = 0,$$

de sorte que les formes reproductibles par

$$(\underline{i\pi,\ -i\pi,\ 0})$$

s'écriront

$$x^2 z + xyz + y^2 z + z^3$$

(chaque terme étant affecté d'un coefficient quelconque), et seront, par conséquent, de la cinquième ou de la septième famille.

Supposons maintenant

$$\nu_1 = \frac{2\pi}{3},$$

la congruence

$$\frac{2\pi}{3}(m_1 - m_2) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

donne

$$m_1 = 3,\quad m_2 = 0,\quad m_3 = 0,$$
$$m_1 = 0,\quad m_2 = 3,\quad m_3 = 0,$$
$$m_1 = 0,\quad u_2 = 0,\quad m_3 = 3,$$
$$m_1 = 1,\quad m_2 = 1,\quad m_3 = 1,$$

de sorte que les formes reproductibles par

$$\left(\underline{\frac{2i\pi}{3},\ -\frac{2i\pi}{3},\ 0}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\underline{\frac{4i\pi}{3},\ -\frac{4i\pi}{3},\ 0}\right)$$

s'écriront

(19) $$x^3 + y^3 + z^3 + xyz$$

(chaque terme étant affecté d'un coefficient quelconque).

Soit maintenant la canonique

$$(\underline{i\nu_1,\ -i\nu_1,\ i\pi});$$

elle conduit à la congruence

$$\nu_1(m_1 - m_2) + \pi m_3 \equiv 0 \pmod{2\pi},$$

d'où

$$2\nu_1(m_1 - m_2) = 0 \pmod{2\pi},$$

ou

$$\nu_1 = \pi, \quad \nu_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \nu_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad \nu_1 = \frac{4\pi}{3}, \quad \nu_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \nu_1 = \frac{5\pi}{3}.$$

Si l'on avait $\nu_1 = \pi$, on aurait

$$m_1 - m_2 + m_3 \equiv 0 \pmod{2},$$

ou

$$m_1 + m_2 + m_3 \equiv 0 \pmod{2},$$

ou

$$3 \equiv 0 \pmod{2},$$

ce qui est absurde.

Si l'on avait $\nu_1 = \frac{\pi}{2}$, la forme proposée devrait être reproductible par

$$\left(\underline{\frac{i\pi}{2},\ -\frac{i\pi}{2},\ i\pi}\right)^2 = (\underline{i\pi,\ -i\pi,\ 0});$$

elle s'écrirait donc

$$z^3 + zx^2 + zy^2 + xyz.$$

Or, si l'on change z en $-z$, le terme en z^3 change de signe; de sorte que les formes reproductibles par

$$\left(\underline{\frac{i\pi}{2},\ -\frac{i\pi}{2},\ i\pi}\right)$$

ne doivent pas contenir de terme en z^3, et sont, par conséquent, de la septième famille.

Si l'on a $\nu_1 = \frac{2\pi}{3}$, la forme devra être reproductible par

$$\underline{\left(\frac{2i\pi}{3}, -\frac{2i\pi}{3}, i\pi\right)}^3 = \underline{\left(\frac{2i\pi}{3} = \frac{2i\pi}{3}, 0\right)}\,\underline{(0, 0, i\pi)};$$

elle ne devrait donc pas changer z en $-z$, c'est-à-dire qu'elle ne pourrait contenir que des termes en

$$x^3, \; y^3, \; z^2x \quad \text{ou} \quad z^2y;$$

de plus, elle devrait être reproductible par

$$\underline{\left(\frac{2i\pi}{3}, -\frac{2i\pi}{3}, i\pi\right)}^2 = \underline{\left(\frac{4i\pi}{3}, -\frac{4i\pi}{3}, 0\right)},$$

et ne pourrait, par conséquent, contenir que des termes en

$$x^3, \; y^3, \; z^3 \quad \text{et} \quad xyz.$$

Une pareille somme devrait donc être indépendante de z et, par conséquent, de la septième famille.

On arrive au même résultat en faisant $\nu_1 = \frac{4\pi}{3}$.

Soit

$$\nu_4 = \frac{\pi}{3}.$$

La forme, étant reproductible par

$$\underline{\left(\frac{i\pi}{3}, -\frac{i\pi}{3}, i\pi\right)}^2 = \underline{\left(\frac{2i\pi}{3}, -\frac{2i\pi}{3}, 0\right)},$$

ne contiendra que des termes en

$$z^3, \; xyz, \; x^3, \; y^3.$$

Or, si l'on fait

$$x = e^{\frac{i\pi}{3}}\xi, \quad y = e^{-\frac{i\pi}{3}}\eta, \quad z = -\zeta,$$

z^3, xyz, x^3, y^3 se changent en

$$-z^3, \quad -xyz, \quad -x^3, \quad -y^3.$$

Il ne peut donc y avoir de forme reproductible par une pareille transformation; il en est de même si $v_1 = \frac{5\pi}{3}$.

Enfin, si l'on envisage la canonique

$$\underline{(o, o, i\pi)},$$

on voit qu'une forme qu'elle reproduit devra s'écrire

$$x^3 + y^3 + xz^2 + yz^2$$

(chaque terme étant affecté d'un coefficient convenable).

Il est aisé de reconnaître que la courbe représentée par une pareille forme a un point d'inflexion en

$$x = y = o,$$

et que la polaire de ce point d'inflexion par rapport à la courbe est la droite $z = o$.

Par conséquent, pour trouver toutes les transformations de la deuxième catégorie qui reproduisent une cubique donnée F, il faut chercher toutes les transformations Σ, telles que

$$F.\Sigma = \alpha x^3 + \beta y^3 + \gamma z^3 + 6\delta xyz,$$

et toutes les transformations S, telles que

$$F.S = \alpha x^3 + \beta y^3 + 3\gamma xz^2 + 3\delta yz^2;$$

les substitutions de la deuxième catégorie qui reproduiront F seront alors

$$\Sigma\left(\underline{\frac{2i\pi}{3}, -\frac{2i\pi}{3}, o}\right)\Sigma^{-1},$$

$$\Sigma\left(\underline{\frac{4i\pi}{3}, -\frac{4i\pi}{3}, o}\right)\Sigma^{-1},$$

$$S\left(\underline{o, o, i\pi}\right)S^{-1}.$$

Appliquons les principes précédents aux formes des différentes familles :

Première famille.

La forme

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3 + z^3)$$

est reproductible par les transformations suivantes, qui appartiennent à la deuxième catégorie. Nous n'écrirons que les transformations réelles, et les considérations précédentes nous donnent, de ces transformations, le Tableau suivant :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire que toutes ces transformations se réduisent à des permutations entre les lettres x, y, z; c'est là un résultat qu'il était aisé de prévoir. En effet, le système des trois droites

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

est le seul système de trois droites réelles sur lesquelles se distribuent les neuf points d'inflexion. Toute transformation réelle qui reproduit la forme proposée doit donc reproduire le système de ces trois droites ; elle doit donc se ramener à une permutation entre ces trois droites. Une conséquence importante, c'est que toutes les substitutions qui reproduisent la forme

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3 + z^3)$$

reproduisent également la forme

$$x^2 + y^2 + z^2.$$

Troisième famille.

La forme

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3)$$

sera évidemment reproductible par toute substitution qui se réduira à une permutation entre les lettres x et y. Réciproquement, puisque les droites $x = 0$, $y = 0$ sont les tangentes au point double, toute substitution réelle ou imaginaire qui reproduira la forme proposée devra reproduire le système de ces deux droites et, par conséquent, se réduire à une permutation entre les lettres x et y.

On voit de même que la seule substitution qui reproduise

$$\beta x^3 + 3\beta xy^2 + 3\alpha x^2 y + 3\alpha y^2 z$$

est la substitution

$$x = \xi, \quad y = -\eta, \quad z = \zeta.$$

Remarquons que les deux substitutions

$$x = \eta, \quad y = \xi, \quad z = \zeta,$$
$$x = \xi, \quad y = -\eta, \quad z = \zeta,$$

qui reproduisent respectivement

$$\beta x^3 + \beta y^2 + 6\alpha xyz,$$
$$\beta x^3 + 3\beta xy^2 + 3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z,$$

reproduisent également

$$x^2 + y^2 + z^2.$$

Cinquième famille.

Pour la même raison, les seules substitutions de la deuxième catégorie qui reproduisent

$$z^3 + 6\alpha xyz,$$
$$z^3 + 3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z$$

sont respectivement

$$x = \eta, \quad y = \xi, \quad z = \zeta;$$
$$x = -\xi, \quad y = -\eta, \quad z = \zeta;$$
$$x = -\eta, \quad y = -\xi, \quad z = \zeta$$

pour la première, et

$$x = -\xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta;$$
$$x = -\xi, \quad y = -\eta, \quad z = \zeta;$$
$$x = \xi, \quad y = -\eta, \quad z = \zeta$$

pour la deuxième.

Ces substitutions reproduisent également

$$x^2 + y^2 + z^2.$$

Quatrième et sixième famille.

Les mêmes principes permettent de démontrer sans peine que les formes de la quatrième famille ne sont reproductibles par aucune substitution réelle de la deuxième catégorie.

Quant à la forme canonique de la sixième famille

$$x^2 y + y^2 z,$$

elle est reproductible par les transformations suivantes de la deuxième catégorie :

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= -\xi - \lambda\eta, \\ y &= \eta, \\ z - 2\lambda x - \lambda y &= \zeta - 2\lambda\xi - \lambda\eta, \end{aligned}$$

λ étant une quantité quelconque; ces transformations s'écriront avec le mode de notation habituel

$$\left| \begin{array}{ccc} -1 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4\lambda & -4\lambda^2 & 1 \end{array} \right|.$$

Toutes ces transformations sont le produit de la transformation unique

$$(-1, 1, 1)$$

par l'une des substitutions de la première catégorie qui reproduisent la forme proposée.

5° *Transformations semblables de la quatrième catégorie.*

Nous ne nous occuperons que des types A_1, B_1 et E_1, ce que nous dirons de ces types s'étendant sans peine aux types C_1, D_1, F_1.

Type A_1.

Soit F une forme homogène en x_1, x_2 et x_3 et reproductible par la transformation

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & \beta \end{vmatrix},$$

on pourra décomposer F en une somme de termes tels que

$$x_1^m \varphi,$$

φ étant une forme homogène en x_2 et en x_3 et reproductible, à un facteur constant près, par la substitution linéaire

$$x_2 = \beta \xi_2,$$
$$x_3 = \gamma \xi_2 + \beta \xi_3,$$

φ sera décomposable en facteurs linéaires et pourra s'écrire

$$\varphi = A(x_2 - \alpha_1 x_3)(x_2 - \alpha_2 x_3)\ldots(x_2 - \alpha_p x_3).$$

Après avoir effectué la substitution linéaire, on aura

$$\varphi = A(\beta\xi_2 - \alpha_1\gamma\xi_2 - \alpha_1\beta\xi_3)(\beta\xi_2 - \alpha_2\gamma\xi_2 - \alpha_2\beta\xi_3)\ldots(\beta\xi_2 - \alpha_p\gamma\xi_2 - \alpha_p\beta\xi_3);$$

φ étant reproductible, on devra avoir

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_1\gamma + \alpha_1\beta}{\beta}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_2\gamma + \alpha_2\beta}{\beta}, \quad \ldots, \quad \alpha_p = \frac{\alpha_p\gamma + \alpha_p\beta}{\beta},$$

d'où

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0.$$

φ ne dépendra donc que de x_2 ; donc F ne dépendra que de x_1 et de x_2. Toute forme ternaire reproductible par une transformation du type A_1 est donc réductible aux formes binaires.

Type B_1.

Soit la transformation

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix};$$

elle reproduit évidemment la forme x_1 ; cherchons maintenant quelles sont les formes quadratiques qu'elle reproduit.

Soit

$$A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2 + 2B_1x_2x_3 + 2B_2x_1x_3 + 2B_3x_1x_2$$

la forme quadratique générale. Par la transformation en question, elle devient

$$\begin{aligned}
A_1\xi_1^2 &+ A_2\xi_2^2 + A_3\xi_3^2 + 2B_1\xi_2\xi_3 + 2B_2\xi_1\xi_3 + 2B_3\xi_1\xi_2 \\
&+ 2A_2\alpha\xi_2\xi_1 + 2A_3\beta\gamma\xi_2\xi_1 + 2B_1\beta\xi_2\xi_1 + 2B_1\alpha\gamma\xi_2\xi_1 + 2B_2\gamma\xi_1\xi_2 \\
&+ A_2\alpha^2\xi_1^2 + A_3\beta^2\xi_1^2 + 2B_1\alpha\beta\xi_1^2 + 2B_2\beta\xi_1^2 + 2B_3\alpha\xi_1^2 \\
&+ A_3\gamma^2\xi_2^2 + 2B_1\gamma\xi_2^2 \\
&+ 2A_3\gamma\xi_2\xi_3 \\
&+ 2A_3\beta\xi_1\xi_3 + 2B_1\alpha\xi_1\xi_3,
\end{aligned}$$

ce qui conduit aux relations

$$\begin{aligned}
&A_2\alpha \;+ A_3\beta\gamma + B_1(\beta + \alpha\gamma) + B_2\gamma = 0,\\
&A_2\alpha^2 + A_3\beta^2 + 2B_1\alpha\beta + 2B_2\beta + 2\beta_3\alpha = 0,\\
&A_3\gamma^2 + 2B_1\gamma = 0,\\
&A_3\gamma \;= 0,\\
&A_3\beta \;+ B_1\alpha = 0.
\end{aligned}$$

En général $\gamma \lesseqgtr 0$; on a donc

$$A_3 = B_1 = 0,$$

et les équations précédentes se réduisent à

$$\begin{aligned}
&A_2\alpha + B_2\gamma = 0,\\
(20)\qquad &A_2\alpha^2 + 2B_2\beta + 2B_3\gamma = 0.
\end{aligned}$$

A_1 est donc arbitraire et des deux équations (20), homogènes en A_2, B_2, B_3, on pourra toujours tirer des valeurs de ces quantités, car des équations homogènes ne sont jamais impossibles.

Soient donc A_2, B_2, B_3 trois quantités qui satisfassent aux équations (20); pour qu'une forme quadratique soit reproductible par la transformation donnée, il faudra et il suffira qu'elle s'écrive

$$(21)\qquad A_1x_1^2 + \lambda(A_2x_2^2 + 2B_2x_1x_3 + 2B_3x_1x_2),$$

A_1 et λ étant deux quantités quelconques.

Réciproquement, si, dans la forme (21), on donne à A_1, A_2, B_2, B_3 des valeurs quelconques, on pourra trouver une infinité de systèmes de valeurs de α, β, γ, qui satisfassent aux équations (20). Je tire de là en passant ce résultat :

Toute forme quadratique ternaire est reproductible par une infinité de transformations de la quatrième catégorie.

Soit maintenant F une forme quelconque reproductible par la transfor-

mation considérée. Soit C la courbe qu'elle représente et qui sera également reproductible par la même transformation.

Considérons l'une quelconque des courbes du deuxième ordre

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + 2 B_2 x_1 x_3 + 2 B_3 x_1 x_2 = 0,$$

où A_1 est un paramètre arbitraire et où A_2, B_2, B_3 ont les valeurs tirées des équations (20). Par chacun des points m de la courbe C, on pourra faire passer une de ces coniques; comme ces coniques sont reproductibles, les transformés successifs des points m sont à la fois sur la courbe C et sur la conique qui passe par m. Mais le point m a une infinité de transformés successifs, tandis que la courbe C et la conique, qui sont algébriques, ne peuvent, à moins de se confondre, avoir une infinité de points communs. Donc la courbe C se réduit à un certain nombre de coniques reproductibles.

La conséquence est que la forme F est fonction homogène de x_1^2 et

$$A_2 x_2^2 + 2 B_2 x_1 x_3 + 2 B_3 x_1 x_2.$$

Elle satisfait donc à l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} \frac{dF}{dx_1} & \frac{dF}{dx_2} & \frac{dF}{dx_3} \\ x_1 & 0 & 0 \\ B_3 x_2 + B_2 x_3 & A_2 x_2 + B_3 x_1 & B_2 x_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(A_2 x_2 + B_3 x_1) \frac{dF}{dx_3} - B_2 x_1 \frac{dF}{dx_2} = 0.$$

Conséquence. — Toute forme reproductible par une transformation de la quatrième catégorie et du type B_1 satisfait à une équation aux différences partielles, linéaire et homogène par rapport aux variables x_1, x_2 et x_3, ainsi que par rapport aux dérivées partielles $\frac{dF}{dx_1}$, $\frac{dF}{dx_2}$, $\frac{dF}{dx_3}$.

Les seules formes cubiques qui satisfassent à cette condition sont celles de la sixième famille.

Type E_1.

Soit F une forme reproductible par

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \beta & 0 \\ 0 & \delta & \varepsilon & \beta \end{vmatrix}.$$

Cette forme pourra se décomposer en termes tels que

$$x_1^m \varphi,$$

φ étant une forme homogène en x_2, x_2, x_4.

Il est évident que φ devra être reproductible à un facteur constant près par

$$\begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \beta & 0 \\ \delta & \varepsilon & \beta \end{vmatrix},$$

et par conséquent absolument reproductible par

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{\beta} & 1 & 0 \\ \frac{\delta}{\beta} & \frac{\varepsilon}{\beta} & 1 \end{vmatrix}.$$

Donc φ satisfera à une équation de la forme

$$(Ax_3 + Bx_2)\frac{d\varphi}{dx_4} - Cx_2\frac{d\varphi}{dx_3} = 0.$$

Il en sera de même de $x_1^m \varphi$ et, par conséquent, de F.

Il suit de là que toute forme reproductible par une transformation du type E_1 satisfait à une équation aux différences partielles linéaire et homogène, par rapport aux variables x_1, x_2, x_3, x_4, ainsi que par rapport aux dérivées partielles $\frac{dF}{dx_1}$, $\frac{dF}{dx_2}$, $\frac{dF}{dx_3}$, $\frac{dF}{dx_4}$.

Ce résultat se généralise sans peine et s'étend aux types D_1, C_1 et F_1.

Toute forme reproductible par une transformation de la quatrième catégorie satisfait à une équation aux différences partielles.

6° *Transformations semblables simultanées.*

Supposons qu'une forme soit reproductible à la fois par deux transformations S et S_1; elle sera reproductible également par tous les produits des puissances de S et de S_1; tels que

$$S^\alpha S_1^\beta S^\gamma S_1^\delta S^\varepsilon.$$

On pourra donc former un groupe de transformations semblables simultanées qui reproduisent la forme proposée.

Supposons que S et que S_1 soient de la première ou de la troisième catégorie et que S soit canonique, on peut, en effet, toujours ramener le cas général à ce cas particulier, à moins que S et que S_1 ne soient de la deuxième catégorie, ce que nous ne supposerons pas.

Si p_1, p_2, p_3, p_4 sont les quatre dérivées partielles de la forme proposée f par rapport aux variables x_1, x_2, x_3, x_4; f devra satisfaire aux équations différentielles

$$(22)\quad \begin{cases} ax_1p_1 + bx_2p_2 + cx_3p_3 + dx_4p_4 = 0, \\ \quad (a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1x_4)p_1 \\ + (a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4)p_2 \\ + (a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 + d_3x_4)p_3 \\ + (a_4x_1 + b_4x_2 + c_4x_3 + d_4x_4)p_4 = 0. \end{cases}$$

Ceci va nous permettre de former d'une autre manière le groupe des transformations semblables simultanées qui reproduisent f; en effet, en prenant les crochets des deux équations (22) (qui sont des équations simul tanées aux dérivées partielles du premier ordre), puis prenant encore les crochets des nouvelles équations obtenues, on obtient de nouvelles équations aux dérivées partielles, qu'on peut ajouter entre elles après les avoir multipliées par des coefficients quelconques. On obtient ainsi une infinité

d'équations de même forme que la seconde des équations (22); ces équations définissent par conséquent de nouvelles transformations qui reproduisent f.

Prenons donc les crochets des deux équations (22), nous trouverons

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = &[b_1(b-a)x_2 + c_1(c-a)x_3 + d_1(d-a)x_4]p_1 \\ &+ [a_2(a-b)x_1 + c_2(c-b)x_3 + d_2(d-b)x_4]p_2 \\ &+ [a_3(a-c)x_1 + b_3(b-c)x_2 + d_3(d-c)x_4]p_3 \\ &+ [a_4(a-d)x_1 + b_4(b-d)x_2 + c_4(c-d)x_3]p_4. \end{aligned}\right.$$

Prenons encore les crochets de la première des équations (22) et de l'équation (23) et nous obtiendrons une nouvelle équation (24) qui ne différera de l'équation (23) que parce que les facteurs entre parenthèses $(b-a)$, $(c-a)$, $(d-a)$, ... seront remplacés par $(b-a)^2$, $(c-a)^2$, $(d-a)^2$.

Pour que les équations (22) soient compatibles, il faut que l'équation (24) soit une conséquence des équations (22) et (23).

Supposons donc qu'on ajoute les équations (23) et (24) après les avoir respectivement multipliées par des coefficients convenablement choisis; on obtiendra une équation résultante (25), et on aura toujours pu s'arranger de façon que dans cette équation (25) le coefficient de x_3p_4, par exemple, soit nul.

Le premier cas qui peut se présenter, c'est que l'équation (25) se réduise à

$$0 = 0,$$

ce qui exige les égalités

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &(a-b)\frac{b_1}{b_1} = (a-c)\frac{c_1}{c_1} = (a-d)\frac{d_1}{d_1} \\ &= (b-a)\frac{a_2}{a_2} = (b-c)\frac{c_2}{c_2} = (b-d)\frac{d_2}{d_2} \\ &= (c-a)\frac{a_3}{a_3} = (c-b)\frac{b_3}{b_3} = (c-d)\frac{d_3}{d_3} \\ &= (d-a)\frac{a_4}{a_4} = (d-b)\frac{b_4}{b_4} = (d-c)\frac{c_4}{c_4}. \end{aligned}\right.$$

Supposons maintenant que l'équation (25) ne se réduise pas à une identité. On formera une équation (27) en prenant les crochets de (25) et de la première des équations (22). Il est clair que dans (27) le coefficient de $x_3 p_4$ est nul. On ajoutera ensuite les équations (25) et (27), après les avoir multipliées par des constantes telles que dans l'équation résultante (28) le coefficient de $x_2 p_4$ soit nul.

Si l'équation (28) est une identité, on est ramené au premier cas, à la condition de remplacer les équations (23) et (24) par (25) et (27), si l'équation (28) n'est pas une identité, on recommence sur (28) la même opération que sur (25), et ainsi de suite. Il est clair que, après douze opérations au plus, on arrivera à une identité.

Par conséquent, tous les cas possibles peuvent se ramener au premier cas, et l'on peut toujours supposer que les équations (26) sont satisfaites.

Dans ce qui va suivre, nous dirons, pour abréger, en parlant des différences $a - b$, $a - c$, $a - d$, $b - c$, $b - c$, ..., les $a - b$, et en parlant des coefficients b_1, c_1, d_1, a_2, b_3, ..., les b_1.

Les équations (26) peuvent être satisfaites de différentes façons.

Première hypothèse.

Tous les $a - b$ sont différents entre eux ; il faut alors que tous les b_1 soient nuls, excepté un, b_1 par exemple.

Alors l'équation (23) se réduit à

$$p_1 = 0.$$

On en conclut que toute forme reproductible à la fois par les deux transformations proposées ne contient pas x_1 et est par conséquent réductible aux formes ternaires.

La première hypothèse doit donc être rejetée.

Dans les deuxième, troisième et quatrième hypothèses, on supposera que deux des $a - b$ sont égaux entre eux.

Deuxième hypothèse.

On a

$$a - b = a - c,$$

il faut alors que tous les b_1 soient nuls, excepté b_1 et c_1 ou bien excepté a_2 et a_3.

Si

$$b_1 \gtrless 0, \quad c_1 \gtrless 0;$$

l'équation (23) se réduit à

$$p_1 = 0,$$

la forme F est donc réductible aux formes ternaires. Si

$$a_2 \gtrless 0, \quad a_3 \gtrless 0,$$

l'équation (23) s'écrit

$$a_2 p_2 + a_3 p_3 = 0,$$

et son intégrale générale est

$$F = \text{fonction générale de } x_1, x_4 \text{ et } a_3 x_2 - a_2 x_3,$$

F est donc encore réductible aux formes ternaires.

Par conséquent, la deuxième hypothèse doit être rejetée pour la même raison que la première.

Troisième hypothèse.

On a

$$a - b = b - c.$$

Il faut alors que tous les b_1 s'annulent, excepté b_1 et c_2.

L'équation (23) s'écrit

$$b_1 x_2 p_1 + c_2 x_3 p_2 = 0,$$

et a pour intégrale générale.

$$F = \text{fonction arbitraire de } x_3, x_4 \text{ et } x_3 x_1 + \lambda x_2^2,$$

λ étant une constante.

Donc, pour obtenir une forme reproductible à la fois par la transformation qui correspond à (23) et par une transformation canonique, il suffit d'additionner deux monômes de même degré en

$$x_3, x_4 \quad \text{et} \quad \sqrt{x_3 x_1 + \lambda x_2^2};$$

on peut, par exemple, obtenir deux formes cubiques, non décomposables en facteurs : ce sont

$$x_4^3 + x_3(x_3 x_1 + \lambda x_2^2),$$
$$x_3^3 + x_4(x_3 x_1 + \lambda x_2^2).$$

Quatrième hypothèse.

On a

$$a - b = c - d.$$

Tous les b_i s'annulent, excepté b_1 et d_3.

L'équation (23) s'écrit

$$b_1 x_2 p_1 + d_3 x_4 p_3 = 0$$

et a pour intégrale générale

$$\text{F} = \text{fonction arbitraire de } x_2,\ x_4 \text{ et } x_1 x_4 + \lambda x_2 x_3,$$

λ étant une constante.

On obtiendra donc les formes cubiques non décomposables en facteurs, et satisfaisant aux conditions proposées, en écrivant

$$x_2^3 + x_4(x_1 x_4 + \lambda x_2 x_3),$$
$$x_4^3 + x_2(x_1 x_4 + \lambda x_2 x_3).$$

La seconde de ces formes se déduit de la première par une permutation d'indices.

Dans les cinquième et sixième hypothèses, on supposera que trois des $a - b$ sont égaux entre eux.

Cinquième hypothèse.

On a

$$a - b = b - c = c - d.$$

Tous les b_i s'annulent, excepté b_1, c_2 et d_3.

L'équation (23) s'écrit

$$b_1 x_2 p_1 + c_2 x_3 p_2 + d_3 x_4 p_3 = 0,$$

d'où

$$\text{F} = \text{fonction arbitraire de } x_4, x_4 x_2 + \lambda x_3^2, x_4^2 x_1 + \mu x_4 x_2 x_3 + \nu x_3^3,$$

λ, μ et ν étant des constantes.

On conclut de là que la seule forme cubique qui soit reproductible à la fois par la transformation qui correspond à l'équation (23) et par une transformation canonique, et qui de plus ne soit pas décomposable en facteurs, est la suivante :

$$x_4^2 x_1 + \mu x_4 x_2 x_3 + \nu x_3^3.$$

Sixième hypothèse.

On a

$$a - b = a - c = a - d.$$

Tous les b_i s'annulent, excepté b_1, c_1, d_1 ou bien excepté a_2, a_3, a_4 ; l'équation (23) s'écrit

$$p_1 = 0,$$

ou bien

$$a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 = 0,$$

de sorte que F est réductible aux formes ternaires, et que l'hypothèse doit être rejetée.

Dans la septième et la huitième hypothèse, on supposera que quatre des $a - b$ sont égaux entre eux.

Septième hypothèse.

On a

$$a - b = a - c = b - d = c - d.$$

Tous les b_i sont nuls, sauf b_1, c_1, d_2 et d_3.

L'équation (23) s'écrit

$$(b_1 x_2 + c_1 x_3) p_1 + d_2 x_4 p_2 + d_3 x_4 p_3 = 0,$$

d'où

$$\text{F} = \text{fonction arbitraire de } x_4,\ x_2 + \nu x_3,\ x_4 x_1 + \lambda x_2^2 + \mu x_2 x^3,$$

λ, μ et ν étant des constantes.

On conclut aisément qu'il n'existe pas de forme cubique indécomposable et reproductible à la fois par les deux transformations proposées.

Huitième hypothèse.

On a

$$a - c = b - c = b - d = a - d.$$

L'équation (23) doit alors se réduire à

$$c_1 x_3 p_1 + d_1 x_4 p_1 + c_2 x_3 p_2 + d_2 x_4 p_2 = 0,$$

et a pour intégrale générale

$$\text{F} = \text{fonction arbitraire de } x_3,\ x_4 \text{ et } x_1 x_3 + \lambda x_1 x_4 + \mu x_2 x_3 + \nu x_2 x_4,$$

d'où l'on conclut qu'il n'existe aucune forme cubique indécomposable et reproductible à la fois par la transformation correspondant à l'équation (23), et par une transformation canonique.

Nous devons faire d'abord une remarque importante sur la seconde des équations (22), c'est que, si l'on multiplie l'équation (23) par un coef-

ficient convenable, puis qu'on la retranche de l'équation (22), il vient

$$a_1 x_1 p_1 + b_2 x_2 p_2 + c_3 x_3 p_3 + d_4 x_4 p_4 = 0,$$

de sorte que l'on doit avoir

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_2} = \frac{c}{c_3} = \frac{d}{d_4},$$

à moins que la forme F ne soit reproductible à la fois par deux transformations canoniques qui ne soient pas des puissances d'une même substitution.

Tout ce qui précède suppose que les équations (23) et (24) ne se réduisent pas à des identités. Voyons ce qui arriverait si pareille chose avait lieu.

Première hypothèse.

Toutes les quantités a, b, c, d sont différentes entre elles.

Dans ce cas, tous les b_1 doivent être nuls, et l'équation (22) se réduit à

$$a_1 x_1 p_1 + b_2 x_2 p_2 + c_2 x_3 p_3 + d_4 x_4 p_4 = 0.$$

Par conséquent, les deux transformations proposées sont canoniques, et l'on a vu plus haut le Tableau des formes cubiques quaternaires qui sont reproductibles à la fois par deux transformations pareilles.

Deuxième hypothèse.

On a

$$a = b.$$

Dans ce cas, tous les b_1 sont nuls, sauf b_1 et a_2, et l'équation (22) s'écrit

$$(a_1 x_1 + b_1 x_2) p_1 + (a_2 x_1 + b_2 x_2) p_2 + c_3 x_3 p_3 + d_4 x_4 p_4 = 0.$$

Si l'on suppose que la transformation qui correspond à cette seconde équation est de la première ou de la troisième catégorie, il sera possible de

la ramener à la forme canonique par un changement linéaire de variables, et l'on voit aisément que, après que ce changement est effectué, la transformation qui correspond à la première équation (22) reste canonique; et par conséquent on est amené au cas précédent.

Si l'on suppose, au contraire, que la transformation qui correspond à la seconde équation (22) est de la quatrième catégorie, elle sera évidemment du type C_1 et par conséquent la forme F réductible aux formes ternaires.

Troisième hypothèse.

On a

$$a = b \quad \text{et} \quad c = d;$$

tous les b_i sont nuls, sauf b_1, a_2, c_4 et d_3.

Quatrième hypothèse.

On a

$$a = b = c;$$

tous les b_i sont nuls, sauf b_1, c_1, a_2, c_2, a_3, b_3.

Dans la troisième et la quatrième hypothèse, si la transformation T_1 qui correspond à la deuxième équation (22), est de la première ou de la troisième catégorie, on raisonnera comme dans la deuxième hypothèse et on arrivera au même résultat.

Dans la troisième hypothèse, si cette transformation T_1 est de la quatrième catégorie, elle est du type D_1 et par conséquent la forme F est réductible aux formes binaires.

Dans la quatrième hypothèse, si T_1 est de la quatrième catégorie, elle est du type E_1; mais toute forme quaternaire reproductible par une transformation du type E_1 est décomposable en facteurs.

RÉSUMÉ.

On a vu plus haut le Tableau des formes cubiques quaternaires reproductibles par deux transformations canoniques qui ne sont pas les puissances d'une même substitution.

Nous allons donner maintenant, en nous appuyant sur les considérations précédentes, le Tableau des formes cubiques quaternaires qui ne sont ni réductibles aux formes ternaires, ni décomposables en facteurs, et qui sont reproductibles par deux transformations de la première, de la troisième ou de la quatrième catégorie, l'une canonique et l'autre non canonique,

$$x_4^3 + x_3^2 x_1 \quad + x_3 x_2^2,$$
$$x_2^3 + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_2^2,$$
$$x_2^3 + x_1 x_4^2 \quad + x_4 x_2 x_3.$$

Il faudrait, bien entendu, ajouter les formes qu'on peut déduire des précédentes en affectant chaque terme d'un coefficient quelconque, et toutes celles qu'on peut en déduire par des permutations d'indices.

En ce qui concerne les formes ternaires, la longue discussion qui précède n'est pas nécessaire; en effet, considérons des formes de la quatrième famille, par exemple : elles représentent des courbes offrant un point de rebroussement et un point d'inflexion; toute substitution qui reproduit la forme donnée reproduira aussi les points singuliers et les tangentes en ces points, et la droite qui joint ces deux points.

Si une transformation de la première catégorie reproduit ce triangle et est canonique, c'est que le triangle est le triangle de référence, et s'il est le triangle de référence, toute transformation de la première catégorie qui le reproduit est canonique.

Donc une forme de la quatrième famille ne peut être reproductible à la fois par deux transformations de la première catégorie, l'une canonique et l'autre non canonique; et, d'ailleurs, nous avons vu qu'une pareille

forme n'est reproductible par aucune substitution de la troisième ou de la quatrième catégorie.

Le même raisonnement s'applique aux formes de la cinquième famille. Par conséquent, les seules formes cubiques ternaires qui soient reproductibles par deux transformations de la première, de la troisième ou de la quatrième catégorie, l'une canonique et l'autre non canonique, sont celles de la sixième famille.

Dans un prochain Mémoire, j'étudierai les applications des considérations qui précèdent à l'étude arithmétique des formes cubiques ternaires.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

SUR LES

FORMES CUBIQUES TERNAIRES ET QUATERNAIRES,

Par M. H. POINCARÉ,

Professeur à la Faculté de Caen.

SECONDE PARTIE.

Dans la première Partie de ce travail (*Journal de l'École Polytechnique*, L[e] Cahier), j'ai étudié les formes en général, et en particulier les formes cubiques ternaires et quaternaires, à un point de vue purement algébrique, et j'ai cherché, entre autres choses, à trouver les transformations linéaires qui reproduisent une forme donnée.

Je vais maintenant pouvoir aborder les problèmes arithmétiques qui sont l'objet principal de ce Mémoire :

1° Reconnaître si deux formes données sont équivalentes ;

2° Distribuer les formes en classes, en genres et en ordres ;

3° Trouver les transformations à coefficients entiers qui reproduisent une forme donnée.

Je résoudrai ces problèmes par une généralisation de la méthode de M. Hermite, sur laquelle je veux donner d'abord quelques explications.

VI. — Méthode de M. Hermite.

Pour que deux formes soient arithmétiquement équivalentes, il faut d'abord qu'elles soient réellement équivalentes, ce que l'on peut reconnaître

par des considérations purement algébriques, qui permettront également de trouver une transformation permettant de passer de l'une à l'autre.

Soient donc F et F′ deux formes dont il s'agit de reconnaître l'équivalence arithmétique; supposons qu'elles soient réellement équivalentes et dérivent par des substitutions réelles d'une même canonique H. Pour reconnaître si F et F′ sont arithmétiquement équivalentes, il faut définir des formes qui jouent, par rapport à F et F′, le même rôle que les réduites par rapport aux formes quadratiques.

Quelques définitions sont tout d'abord nécessaires.

On appellera *substitution réduite* toute substitution qui, appliquée à la forme quadratique définie,

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 \quad \text{ou} \quad x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2,$$

donne une forme quadratique définie réduite.

Parmi les formes dérivées de la canonique H, on appellera *formes réduites* toutes les formes qui pourront être tirées de H par une substitution réduite.

Soit à trouver toutes les formes réduites arithmétiquement équivalentes à une forme F qui est elle-même réellement équivalente à la canonique H.

Soit T une transformation qui permet de passer de H à F, de telle sorte que

$$F = H.T.$$

Soit τ une transformation qui reproduit H; on aura évidemment

$$F = H.\tau.T,$$

et l'on obtiendra toutes les transformations qui font passer de H à F, en prenant toutes les transformations qui reproduisent H, et les multipliant par T.

Pour trouver toutes les formes réduites équivalentes à F, il faut chercher toutes les transformations entières E, telles que la substitution

$$\tau.T.E$$

soit réduite, ou, ce qui revient au même, telles que la forme quadratique définie

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).\tau.\mathrm{T}.\mathrm{E},$$

ou

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2).\tau.\mathrm{T}.\mathrm{E},$$

soit réduite.

D'après ce qu'on sait des formes quadratiques définies, on est sûr qu'il y a toujours une substitution entière E qui réduit

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).\tau.\mathrm{T},$$

ou

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2).\tau.\mathrm{T};$$

en général, il n'y en a qu'une, et l'on peut la trouver aisément.

Si donc le type H n'est reproductible par aucune substitution, il y aura une forme réduite équivalente à F et, en général, il n'y en aura qu'une.

Si le type H est reproductible par différentes substitutions, il y aura, en général, un nombre fini ou une infinité de réduites équivalentes à F, et il sera aisé de les trouver.

Cela posé, il est clair que, pour que deux formes soient équivalentes, il faut et il suffit que le système des réduites de l'une soit identique au système des réduites de l'autre.

La méthode de M. Hermite peut également servir à trouver toutes les substitutions *entières* qui reproduisent F.

Supposons, en effet, que l'on ait

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}.\mathrm{S},$$

S étant une substitution entière.

Soit E l'une des substitutions entières qui réduisent F, de telle sorte que

$$\mathrm{F}.\mathrm{E}$$

soit une réduite.

On aura de même

$$F.E = F.S.E.$$

La substitution entière S.E réduira donc F et conduira à la même réduite que la substitution E.

Par conséquent, pour trouver une transformation entière qui reproduise F, il faut chercher deux substitutions entières et unitaires qui réduisent F et transforment cette forme en une même réduite.

Soient E et E_1 ces deux substitutions,

$$E_1 . E^{-1}$$

sera une substitution entière qui reproduira F.

VII. — Propriétés des transformations réduites.

Il y a plusieurs manières de définir les transformations réduites ; car il y a plusieurs manières de définir les réduites d'une forme quadratique définie.

Supposons une forme ternaire, pour fixer les idées, et soit

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy$$

cette forme ; d'après une première définition, on peut dire que cette forme est réduite : si A est le plus petit nombre qu'elle puisse représenter, quand on donne à x, y, z des valeurs entières telles, que l'on n'ait pas à la fois

$$x = y = z = 0 ;$$

si de plus A' est le plus petit nombre qu'elle puisse représenter, quand on donne à x, y, z des valeurs entières telles, que l'on n'ait pas à la fois

$$y = z = 0 ;$$

si enfin A'' est le plus petit nombre qu'elle puisse représenter, quand on

donne à x, y, z des valeurs entières, telles que l'on n'ait pas

$$z = 0.$$

Nous pourrions nous servir des transformations réduites définies de la sorte, et nous atteindrions, grâce à elles, le but que nous nous proposons; toutefois ce ne sera pas de cette définition que nous ferons le plus fréquent usage, mais bien de la définition qui est due à MM. Korkine et Zolotareff (*Matematische Annalen*, Band 6).

On dit alors qu'une forme est réduite quand on peut l'écrire de la façon suivante

$$\mu_1(x_1 + \varepsilon_{21}x_2 + \varepsilon_{31}x_3)^2 + \mu_2(x_2 + \varepsilon_{32}x_3)^2 + \mu_3 x_3^2,$$

où

1° Tous les ε sont plus petits en valeur absolue que $\frac{1}{2}$;
2° μ_1 est le plus petit nombre que puisse représenter la forme donnée;
3° μ_2 est le plus petit nombre que puisse représenter la forme binaire

$$\mu_2(x_2 + \varepsilon_{32}x_3)^2 + \mu_3 x_3^2.$$

Une transformation sera alors réduite, si elle s'écrit

$$\mathrm{T} \times \begin{vmatrix} \sqrt{\mu_1} & \varepsilon_{21}\sqrt{\mu_1} & \varepsilon_{31}\sqrt{\mu_1} \\ 0 & \sqrt{\mu_2} & \varepsilon_{32}\sqrt{\mu_2} \\ 0 & 0 & \sqrt{\mu_3} \end{vmatrix},$$

où T est une substitution qui reproduit

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

et où les μ et les ε satisfont aux conditions précédentes.

MM. Korkine et Zolotareff ont démontré, dans le Mémoire auquel j'ai renvoyé, diverses propriétés des μ.

On a, dans le cas des formes ternaires,

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 = 1,$$

$$\mu_2 > \tfrac{3}{4}\mu_1, \quad \mu_3 > \tfrac{2}{3}\mu_1;$$

dans le cas des formes quaternaires,

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 = 1,$$

$$\mu_2 > \tfrac{3}{4}\mu_1, \quad \mu_3 > \tfrac{2}{3}\mu_1, \quad \mu_4 > \tfrac{1}{2}\mu_1.$$

Nous ferons de ces propriétés un fréquent usage.

VIII. — Réflexions sur la méthode précédente.

Il est clair que la définition que nous venons de donner des réduites équivalentes à une forme quelconque laisse quelque prise à l'équivoque; en effet, on n'arrivera pas au même résultat :

1° Quelle que soit la manière dont on aura défini les transformations réduites (*voir* le paragraphe précédent);

2° Quelle que soit la forme H qui aura été choisie comme canonique parmi les formes algébriquement équivalentes à F.

Toutes les fois qu'on parlera des réduites d'une forme F, il faudra, par conséquent, spécifier :

1° Si l'on définit les transformations réduites à la manière ordinaire ou à la façon de MM. Korkine et Zolotareff, ou de toute autre manière;

2° Quelle est la canonique H qui est choisie dans toutes les formes réellement équivalentes à F.

Ainsi, pour les formes quadratiques binaires par exemple, on choisit généralement pour la canonique ou bien $\alpha(x^2+y^2)$, ou bien αxy, ou enfin $\alpha(x^2-y^2)$; mais il est clair que l'on pourrait tout aussi bien choisir une canonique différente; et alors on arriverait à une théorie tout à fait identique à la théorie ordinaire, bien que les réduites soient définies d'une façon toute différente.

IX. — Théorème de M. Jordan.

M. Jordan a démontré (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 5 mai 1879) un théorème qu'il énonce ainsi :

Les formes à coefficients entiers algébriquement équivalentes à une forme donnée se répartissent en un nombre fini de classes, pourvu que le discriminant ne soit pas nul.

Nous allons donner de ce théorème une démonstration nouvelle, et arriver ainsi à faire voir qu'il est vrai non seulement quand le discriminant n'est pas nul, mais encore, dans certains cas, bien que le discriminant soit nul.

Pour que les formes algébriquement équivalentes à une forme donnée se répartissent en un nombre infini de classes, il faut, en effet, nous allons le faire voir, que non seulement le discriminant, mais encore d'autres invariants, que nous apprendrons à former, s'annulent à la fois.

Pour démontrer le théorème de M. Jordan, nous allons faire voir qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de réduites algébriquement équivalentes à une forme donnée.

Supposons en effet, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'une forme ternaire d'ordre m, algébriquement équivalente à une canonique H.

Appelons réduite de la première catégorie toute réduite telle que le coefficient de x_1^m et celui de $x_1^{m-1}x_2$ ne soient pas nuls à la fois.

Je dis d'abord que, les réduites à coefficients entiers de la première catégorie algébriquement équivalentes à H sont en nombre fini.

Soit

$$H = \Sigma A_{h.k.l} x_1^h x_2^k x_3^l$$

et soit

$$F = H.S = \Sigma B_{h.k.l} x_1^h x_2^k x_3$$

une forme réduite algébriquement équivalente à H; S, qui est une substi-

tution réduite, s'écrira

$$S = T \times \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{31} \\ 0 & 1 & \varepsilon_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\mu_3} \end{vmatrix},$$

T étant une substitution qui reproduit

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

et dont, par conséquent, les coefficients sont tous plus petits que 1.

Quant aux ε, ils sont plus petits que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue.

On a alors

$$H.T = \Sigma C_{m.n.p} x_1^m x_2^n x_3^p,$$

et il est clair que, les coefficients de T étant tous limités, les C devront être également limités. De même, si l'on pose

$$H.T \times \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{31} \\ 0 & 1 & \varepsilon_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \Sigma D_{h.k.l} x_1^h x_2^k x_3^l,$$

les D seront ainsi limités. Or, on a

$$(29) \qquad A_{h.k.l} = D_{h.k.l} \mu_1^{\frac{h}{2}} \mu_2^{\frac{k}{2}} \mu_3^{\frac{l}{2}}.$$

Par hypothèse, des deux coefficients

$$A_{m.0.0}, \quad A_{m-1.1.0},$$

l'un au moins n'est pas nul. Soit, par exemple, $A_{m-1.1.0}$, on a

$$(30) \qquad A_{m-1.1.0} = D_{m-1.1.0} \mu_1^{\frac{m-1}{2}} \mu_2^{\frac{1}{2}}.$$

Multiplions les équations (29) et (30), après avoir élevé la deuxième au carré :

$$A_{h.k.l} \times A_{m-1.1.0}^2 = D_{h.k.l} \times D_{m-1.1.0}^2 \mu_1^{\frac{2m-2+h}{2}} \mu_2^{\frac{k+2}{2}} \mu_3^{\frac{l}{2}}.$$

Remarquons :

1° Que

$$h+k+l=m;$$

2° Que

$$\mu_2 > \tfrac{3}{4}\mu_1, \quad \mu_3 > \tfrac{3}{4}\mu_2, \quad \mu_3 > \tfrac{2}{3}\mu_3;$$

d'où

$$\mu_1^{\frac{2m-2}{2}+\frac{h}{2}} < \mu_1^{\frac{m}{2}} \times \left(\tfrac{3}{4}\mu_2\right)^{\frac{m-2}{2}} \times \left(\tfrac{3}{2}\mu_3\right)^{\frac{h}{2}},$$

$$\mu_2^{\frac{k+2}{2}} < \mu_2 \times \left(\tfrac{4}{3}\mu_3\right)^{\frac{k}{2}};$$

d'où

$$\mu_1^{\frac{2m-2+h}{2}} \mu_2^{\frac{k+2}{2}} \mu_3^{\frac{l}{2}} < \left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{m+k-2}{2}} \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{h}{2}} (\mu_1\mu_2\mu_3)^{\frac{m}{2}},$$

ou

$$\mu_1^{\frac{2m-2+h}{2}} \mu_2^{\frac{k+2}{2}} \mu_3^{\frac{l}{2}} < \left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{m+k-2}{2}} \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{h}{2}},$$

ou enfin

$$A_{h.k.l} \times A^2_{m-1.1.0} < D_{h.k.l} D^2_{m-1.1.0} \left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{m+k-2}{2}} \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{h}{2}}.$$

Donc le produit de

$$A_{h.k.l} \quad \text{et} \quad A^2_{m-1.1.0}$$

est limité. Mais $A_{m-1.1.0}$, qui n'est pas nul, est au moins égal à 1. Donc $A_{h.k.l}$ est limité.

Donc il n'y a qu'un nombre fini de réduites de la première catégorie équivalentes à H.

Soit maintenant $\Delta.H$ un covariant quelconque de H; on aura, T étant une transformation unitaire quelconque,

$$(\Delta.H)T = \Delta(H.T).$$

Si de plus H.T a ses coefficients entiers, $\Delta(H.T)$ aura également ses coefficients entiers.

Supposons que, parmi les formes algébriquement équivalentes à $\Delta.H$, on choisisse ΔH comme forme canonique $(\Delta.H)$, T sera alors une forme ré-

duite quand T sera une transformation réduite, c'est-à-dire quand H.T sera une forme réduite.

Nous dirons que $\Delta.H$ est un covariant de la première espèce quand le symbole Δ représentera une opération telle qu'à une forme $\Delta.H$ corresponde une seule forme H (par exemple le hessien des formes cubiques ternaires de la première famille).

Nous dirons que $\Delta.H$ est un covariant de la deuxième espèce quand, sans être de la première espèce, il est du même degré que H (par exemple, le hessien des formes cubiques ternaires de la deuxième famille).

Enfin ΔH sera de la troisième espèce s'il n'est ni de la première ni de la deuxième.

H.T sera une réduite de la deuxième catégorie si, sans être de la première catégorie, elle est telle que $\Delta.H.T$ soit de la première catégorie, et si $\Delta.H$ est de la première espèce.

Il est clair que les réduites de la première catégorie $\Delta.H.T$ et, par conséquent, les réduites de la deuxième catégorie H.T seront en nombre fini.

H.T sera une réduite de la troisième catégorie si, sans être de la première catégorie, elle est telle que $\Delta.H.T$ soit de la première catégorie, ΔH représentant un covariant de la deuxième espèce,

$$\Delta H + \lambda H,$$

où λ est un entier quelconque, sera alors un covariant de la première ou de la deuxième espèce, et

$$(\Delta H + \lambda H) T$$

sera, par rapport à la canonique $(\Delta H + \lambda H)$, une réduite de la première catégorie.

Il n'y aura donc qu'un nombre fini de réduites à coefficients entiers, telles que

$$(\Delta H + \lambda H) T,$$

et, comme il n'y a non plus qu'un nombre fini de réduites à coefficients

entiers, telles que

$$\Delta HT,$$

il n'y aura qu'un nombre fini de réduites de la troisième catégorie, telles que

$$HT.$$

H.T sera une réduite de la quatrième catégorie si, sans être de la première catégorie, elle est telle que le coefficient du terme de ΔHT, dont le degré en x_1 est le plus élevé, ne soit pas nul, et si, de plus, ΔH est un covariant de la troisième espèce.

Je dis que les réduites de la quatrième catégorie sont encore en nombre fini.

En effet, les réduites à coefficients entiers, telles que ΔHT, sont encore en nombre fini.

Soit m le degré de H et p celui de ΔH,

$$\Delta H^m + H^p$$

sera un covariant, et

$$[(\Delta H)^m + H^p]T$$

sera une réduite par rapport à ce covariant; si dans ΔHT le coefficient de x_1^p n'est pas nul, pendant que dans HT le coefficient de x_1^m est nul (ce qui a lieu puisque HT est une réduite de quatrième catégorie) le coefficient de x_1^{mp} dans

$$[(\Delta H)^m + H^p]T$$

ne sera pas nul et, par conséquent, cette réduite sera de la première catégorie. Donc il n'y aura qu'un nombre fini de réduites :

1° Telles que ΔHT;

2° Telles que $(\Delta H)^m T$;

3° Telles que $[(\Delta H)^m + H^p]T$;

4° Telles que $H^p T$;

5° Enfin telles que HT. C. Q. F. D.

En résumé, il n'y aura qu'un nombre fini de réduites à coefficients en-

tiers, dérivées de H, soit de la première catégorie, soit de la deuxième, de la troisième ou de la quatrième catégorie par rapport à un covariant quelconque de H.

Pour qu'il y ait un nombre infini de réduites dérivées de H, il faut donc qu'il y ait des réduites qui ne soient ni de la première catégorie, ni de la deuxième, de la troisième ou de la quatrième catégorie par rapport à aucun des covariants de H.

Or voyons ce que cela signifie dans le langage géométrique.

Supposons que la transformation T s'écrive

$$x_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3,$$
$$x_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3,$$
$$x_3 = \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \gamma_3\xi_3.$$

Dire que le coefficient de ξ_1^m dans HT est nul, c'est dire que le point

$$\xi_2 = \xi_3 = 0$$

ou

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\beta_1} = \frac{x_3}{\gamma_1}$$

est sur la courbe

$$H = 0.$$

Dire que les coefficients de ξ_1^m et $\xi_1^{m-1}\xi_2$ dans HT sont nuls à la fois, c'est dire que la droite

$$\xi_3 = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} x_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ x_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ x_3 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

est tangente à la courbe $H = 0$ au point

$$\xi_2 = \xi_3 = 0.$$

Dire que HT est une réduite qui n'est ni de la première, ni de la deuxième, ni de la troisième, ni de la quatrième catégorie, c'est dire que

la droite

$$\xi_3 = 0$$

est tangente, au point

$$\xi_2 = \xi_3 = 0,$$

à toutes les courbes telles que

$$\Delta H = 0,$$

ΔH étant un covariant quelconque de première ou de seconde espèce, et que le point

$$\xi_2 = \xi_3 = 0$$

est sur toutes les courbes telles que

$$\Delta_1 H = 0,$$

$\Delta_1 H$ étant un covariant quelconque de troisième espèce.

Pour qu'il y ait un nombre infini de réduites, il faut donc que toutes les courbes telles que

$$\Delta H = 0, \quad \Delta_1 H = 0$$

aillent passer par un même point, et que toutes les courbes telles que

$$\Delta H = 0$$

soient tangentes à une même droite en un même point.

Pour que les trois courbes

$$H = 0, \quad \Delta H = 0, \quad \Delta_1 H = 0$$

se coupent en un même point, il faut qu'un certain invariant soit nul; de même, pour que les deux courbes

$$H = 0, \quad \Delta H = 0$$

soient tangentes entre elles, il faut qu'un autre invariant soit nul.

Pour qu'il y ait un nombre infini de réduites, c'est-à-dire pour que le

théorème de M. Jordan soit en défaut, il faut donc que tous les invariants ainsi formés soient nuls à *la fois.*

Ce que nous venons de dire des formes ternaires s'étendrait aux formes d'un plus grand nombre de variables.

X. — Formes cubiques ternaires de la première et de la seconde famille.

Nous allons appliquer les principes précédents aux formes cubiques ternaires.

Soit d'abord

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3 + z^3) = \mathrm{H},$$

qui est la forme canonique de la première ou de la seconde famille.

Une pareille forme, nous l'avons vu, n'est reproductible que par des substitutions de la deuxième catégorie, qui se réduisent à des permutations entre les lettres x, y, z; soit S l'une quelconque de ces substitutions qui reproduisent la forme H.

Soit

$$\mathrm{F} = \mathrm{H.T}$$

une forme quelconque réellement équivalente à H.

Les substitutions qui permettront de passer de H à F seront toutes de la forme

$$\mathrm{S.T.}$$

Pour trouver les diverses réduites de F, il faut donc chercher la substitution entière E, qui réduit

$$(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{S.T},$$

et l'appliquer à F. Or S reproduit

$$x^2 + y^2 + z^2;$$

donc E doit réduire

$$(x^2 + y^2 + z^2)T.$$

Or, en général, il n'y aura qu'une substitution E qui réduise cette forme. Donc F n'aura qu'une réduite

$$F.E.$$

Par conséquent, les formes cubiques ternaires de la première et de la seconde famille n'ont en général qu'une seule réduite.

Dans le cas particulier qui nous occupe, la considération des réduites n'est pas indispensable pour reconnaître l'équivalence de deux formes. En effet, comme on ne peut algébriquement passer d'une forme à l'autre que par un nombre fini de transformations, il suffit de s'assurer si les coefficients de l'une de ces transformations sont entiers, pour savoir s'il y a équivalence des deux formes.

Voyons ce que devient, dans le cas particulier qui nous occupe, le théorème de M. Jordan.

Nous ne considérerons qu'un seul des covariants de H, qui sera son hessien. Ce hessien est un covariant de la première espèce si H est de la première famille et de la seconde espèce si H est de la seconde famille; nous le désignerons, comme d'habitude, par la notation ΔH.

Mais les courbes

$$H = 0, \quad \Delta H = 0$$

ne peuvent jamais être tangentes entre elles.

Donc toutes les réduites algébriquement dérivées de H sont de la première ou de la deuxième catégorie si H est de la première famille, de la première ou de la troisième catégorie si H est de la seconde famille.

Le théorème de M. Jordan n'est donc jamais en défaut pour les formes de la première ou de la seconde famille.

Le problème qui se présente maintenant, c'est de trouver, en fonctions des invariants S et T, des limites supérieures que les coefficients de ces réduites ne puissent dépasser.

Mais limiter ces coefficients en fonctions de S *et de* T, *c'est les limiter en fonctions de* α *et de* β, qui sont des fonctions de S et de T définies par les égalités

$$S = 4\alpha(\alpha^3 - \beta^3),$$
$$T = 8\alpha^6 + 20\alpha^3\beta^3 - \beta^6.$$

On peut se servir de ces deux égalités soit pour calculer α et β, quand on connaît S et T, soit pour trouver des limites supérieures de α et de β, qui s'expriment d'une façon simple en fonctions de S et de T.

Quand on aura ensuite limité les coefficients des réduites en fonctions de α et de β, on pourra obtenir aisément des expressions des limites de ces fonctions de S et de T, expressions qui pourront être plus ou moins rapprochées des limites précises et plus ou moins compliquées.

Premier problème. — *Limiter en fonctions de* α *et de* β *les coefficients des réduites de la première catégorie.*

Soit

$$\begin{aligned} HT = {} & A_1\xi_1^3 + A_2\xi_2^3 + A_3\xi_3^3 \\ & + 2B_{12}\xi_1^2\xi_2 + 3B_{23}\xi_2^2\xi^3 + 3B_{31}\xi_2^3\xi_4 \\ & + 3B_{21}\xi_1\xi_2^2 + 3B_{32}\xi_2\xi_3^2 + 3B_{13}\xi_3\xi_1^2 + 6C\xi_1\xi_2\xi_3 \end{aligned}$$

une réduite de la première catégorie.

Par définition, A_1 et B_{12} ne seront pas nuls à la fois, et l'on aura

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{31} \\ 0 & 1 & \varepsilon_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\mu_3} \end{vmatrix}$$

ou

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\varepsilon_{21} + \beta_1 & \alpha_1\varepsilon_{31} + \beta_2\varepsilon_{32} + \gamma_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2\varepsilon_{21} + \beta_2 & \alpha_2\varepsilon_{31} + \beta_2\varepsilon_{32} + \gamma_2 \\ \alpha_3 & \alpha_3\varepsilon_{21} + \beta_3 & \alpha_3\varepsilon_{31} + \beta_3\varepsilon_{32} + \gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sqrt{\mu_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\mu_3} \end{vmatrix}.$$

Comme, d'après la définition des transformations réduites donnée par

Zolotareff, la substitution

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_3 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

reproduit $x^2+y^2+z^2$ et a, par conséquent, tous les coefficients plus petits que 1 en valeur absolue; comme, d'autre part, les ε sont plus petits que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue, on aura, en valeur absolue, les inégalités suivantes :

$$\alpha_i < 1, \quad \alpha_i \varepsilon_{21} + \beta_i < \tfrac{3}{2}, \quad \alpha_i \varepsilon_{31} + \beta_i \varepsilon_{32} + \gamma_i < 2.$$

Posons

$$\Phi = \mathrm{H} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\varepsilon_{21} + \beta_1 & \alpha_1\varepsilon_{31} + \beta_1\varepsilon_{32} + \gamma_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2\varepsilon_{21} + \beta_2 & \alpha_1\varepsilon_{32} + \beta_2\varepsilon_{32} + \gamma_2 \\ \alpha_3 & \alpha_3\varepsilon_{21} + \beta_3 & \alpha_3\varepsilon_{31} + \beta_3\varepsilon_{32} + \gamma_3 \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi = {} & a_1 y_1^3 + a_2 y_2^3 + a_3 y_3^3 \\ & + 3b_{12} y_1^2 y_2 + 3b_{23} y_2^2 y_3 + 3b_{31} y_3^2 y_1 \\ & + 3b_{21} y_1 y_2^2 + 3b_{32} y_2 y_3^2 + 3b_{13} y_3 y_1^2 + 6c y_1 y_2 y_3. \end{aligned}$$

Les inégalités auxquelles satisfont les coefficients de la substitution qui permet de passer de H à Φ montrent que les a, les b et c satisfont aux inégalités que nous allons former.

Soit

$$\lambda = 6(\alpha) + 3(\beta),$$

(α) et (β) étant les valeurs absolues de α et de β ; nous appellerons de même Λ la quantité qui joue, par rapport au hessien de H, le même rôle que λ par rapport à H.

Λ et λ sont des fonctions de S *et de* T.

On a évidemment, en valeur absolue,

$$(32)\quad \begin{cases} a_1 < \lambda, \quad a_2 < \lambda\left(\frac{3}{2}\right)^3 \text{ ou } \lambda\frac{27}{8}, \quad a_3 < \lambda 2^3 \text{ ou } 8\lambda, \\ b_{12} < \lambda\frac{3}{2}, \quad b_{23} < \lambda\left(\frac{3}{2}\right)^2 2 \text{ ou } \lambda\frac{9}{2}, \quad b_{31} < \lambda 2^2 \text{ ou } 4\lambda, \\ b_{21} < \lambda\left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ ou } \lambda\frac{9}{4}, \quad b_{32} < \lambda\frac{3}{2}2^2 \text{ ou } 6\lambda, \quad b_{13} < 2\lambda, \\ c < \lambda\frac{3}{2}2 \text{ ou } 3\lambda. \end{cases}$$

Ces inégalités limitent les a, les b, etc. Cherchons maintenant à limiter les A, les B et C; pour cela, nous nous servirons des égalités évidentes

$$(33)\quad \begin{cases} A_1 = a_1\mu_1^{\frac{3}{2}}, \quad A_2 = a_2\mu_2^{\frac{3}{2}}, \quad A_3 = a_3\mu_2^{\frac{3}{2}}, \quad B_{12} = b_{12}\mu_1\mu_2^{\frac{1}{2}}. \\ B_{23} = b_{23}\mu_2\mu_3^{\frac{1}{2}}, \quad B_{31} = b_{31}\mu_3\mu_1^{\frac{1}{2}}, \quad B_{21} = b_{21}\mu_2\mu_1^{\frac{1}{2}}, \\ B_{32} = b_{32}\mu_3\mu_2^{\frac{1}{2}}, \quad B_{12} = b_{13}\mu_1\mu_3^{\frac{1}{2}}, \quad C = c\mu_1^{\frac{1}{2}}\mu_2^{\frac{1}{2}}\mu_3^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

On a

$$C = c,$$

d'où

$$C < 3\lambda,$$

$$A_1 = a_1\mu_1^{\frac{3}{2}} < a_1\mu_1^{\frac{1}{2}}\mu_2^{\frac{1}{2}}\mu_3^{\frac{1}{2}}\sqrt{\tfrac{4}{3}\,\tfrac{3}{2}}, \quad \text{d'où} \quad A_1 < \lambda\sqrt{2},$$

$$B_{12} = b_{12}\mu_1\mu_2^{\frac{1}{2}} < b_{12}\mu_1^{\frac{1}{2}}\mu_2^{\frac{1}{2}}\mu_3^{\frac{2}{2}}\sqrt{\tfrac{3}{2}}, \quad \text{d'où} \quad B_{12} < \lambda\sqrt{\tfrac{27}{6}},$$

$$B_{21} = b_{21}\mu_2\mu_1^{\frac{1}{2}} < b_{21}\mu_1^{\frac{1}{2}}\mu_2^{\frac{1}{2}}\mu_2^{\frac{2}{1}}\sqrt{\tfrac{4}{3}}, \quad \text{d'où} \quad B_{21} < \lambda\sqrt{\tfrac{27}{1}},$$

$$B_{13} = b_{13}\mu_1\mu_3^{\frac{1}{2}} < b_{13}\mu_1^{\frac{1}{2}}\mu_2^{\frac{1}{2}}\mu_3^{\frac{1}{2}}\sqrt{\tfrac{4}{3}}, \quad \text{d'où} \quad B_{13} < \lambda\sqrt{\tfrac{8}{3}}.$$

Comme nous n'avons pas supposé jusqu'ici que la réduite HT fût de la première catégorie, les quatre inégalités précédentes subsistent, que la réduite soit de la première, de la deuxième ou de la troisième catégorie.

On a

$$A_1A_2 = a_1a_2\mu_1^{\frac{3}{2}}\mu_2^{\frac{3}{2}} < a_1a_2\sqrt{\tfrac{4}{3}\,\tfrac{3}{2}}, \quad \text{d'où} \quad A_1A_2 < \lambda^2\tfrac{27}{8}\sqrt{2},$$

$$A_1B_{23} = a_1b_{23}\mu_1^{\frac{3}{2}}\mu_2\mu_3^{\frac{1}{2}} < a_1b_{23}\sqrt{\tfrac{2}{9}}, \quad \text{d'où} \quad A_1B_{23} < \lambda^2\times\tfrac{9}{4}\sqrt{6},$$

$$A_1 B_{31} = a_1 b_{31} \mu_1^2 \mu_{31} \quad < a_1 b_{31} \tfrac{4}{3}, \quad \text{d'où} \quad A_1 B_{31} < \lambda^2 \times \tfrac{16}{3},$$

$$A_1 B_{32} = a_1 b_{32} \mu_1^{\frac{3}{2}} \mu_2^{\frac{1}{2}} \mu_3 < a_1 b_{32} \sqrt{\tfrac{4}{9}}, \quad \text{d'où} \quad A_1 B_{32} < \lambda^2 \times 4\sqrt{3},$$

$$B_{12} A_2 = b_{12} a_2 \mu_1 \mu_2^2 \quad < b_{12} a_2 \tfrac{4}{3}, \quad \text{d'où} \quad B_{12} A_2 < \lambda^2 \times \tfrac{27}{4},$$

$$B_{12} A_{23} = b_{12} b_{23} \mu_1 \mu_2^{\frac{3}{2}} \mu_9^{\frac{1}{2}} < b_{12} b_{23} \sqrt{\tfrac{4}{8}}, \quad \text{d'où} \quad B_{12} B_{23} < \lambda^2 \times \tfrac{9}{2}\sqrt{3},$$

$$B_{12} B_{31} = b_{12} b_{31} \mu_1^{\frac{3}{2}} \mu_2^{\frac{1}{2}} \mu_3 < b_{12} b_{31} \sqrt{\tfrac{4}{3}}, \quad \text{d'où} \quad B_{12} B_{31} < \lambda^2 \times 4\sqrt{3},$$

$$B_{12} B_{32} = b_{12} b_{32} \mu_1 \mu_2 \mu_3 \leq b_{12} b_{32}, \quad \text{d'où} \quad B_{12} B_{32} < \lambda^2 \times 9.$$

Comme des deux coefficients A_1 et B_{12} l'un au moins n'est pas nul et, par conséquent, au moins égal à 1, on aura en valeur absolue

$$A_2 < \tfrac{27}{4}\lambda^2, \qquad B_{23} < \tfrac{9}{2}\lambda^2\sqrt{3},$$
$$B_{31} < 4\lambda^2\sqrt{3}, \quad B_{32} < 9\lambda^2.$$

Il reste à limiter A_3; nous y arriverons à l'aide des inégalités

$$A_1^2 A_3 = a_1^2 a_3 \mu_1^3 \mu_3^{\frac{3}{2}} \qquad < a_1^2 a_3 \left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$
$$B_{12}^2 A_3 = b_{12}^2 a_3 \mu_1^2 \mu_2 \mu_3^{\frac{3}{2}} < b_{12}^2 a_3 \sqrt{\tfrac{4}{3}},$$

d'où

$$A_1^2 A_3 < \lambda^3 \times 8\left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad B_{12}^2 A_3 < \lambda^3 \times 8\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 \sqrt{\tfrac{4}{3}},$$

et enfin

$$A_3 < 12\lambda^3\sqrt{3}.$$

Deuxième problème. — *Limiter en fonctions de α et de β ou, ce qui revient au même, en fonctions de λ et de Λ les coefficients des réduites de la deuxième et de la troisième catégorie.*

Je remarque d'abord que les cinq inégalités

$$C < 3\lambda, \quad A_1 < \lambda\sqrt{2}, \quad B_{12} < \lambda\sqrt{\tfrac{27}{8}}, \quad B_{13} < \lambda\sqrt{\tfrac{8}{3}}, \quad B_{21} < \lambda\sqrt{\tfrac{27}{4}}$$

subsistent toujours; de plus, nous devons remarquer que, le discriminant

n'étant pas nul, tandis que A_1 et B_{12} sont nuls, on doit avoir

$$B_{13} \lesseqgtr 0,$$

d'où

$$B_{13} \geq 1$$

en valeur absolue.

On peut donc se servir des inégalités

$$B_{13}A_2 = b_{13}a_2\mu_1\mu_3^{\frac{1}{2}}\mu_3^{\frac{6}{2}} < b_{13}a_2\sqrt{\tfrac{4}{3}}, \quad \text{d'où} \quad B_{13}A_2 < \tfrac{32}{3}\lambda^2\sqrt{3},$$

$$B_{13}B_{23} = b_{13}b_{23}\mu_1\mu_2\mu_3 = b_{13}b_{23}, \quad \text{d'où} \quad B_{13}B_{23} < 9\lambda^2,$$

d'où

$$A_2 < \tfrac{32}{3}\lambda^2\sqrt{3}, \quad B_{23} < 9\lambda^2.$$

Il reste à limiter B_{31}, B_{32} et A_3.

Première méthode.

La première méthode consisterait à limiter les coefficients du hessien, puis à exprimer les coefficients de la forme elle-même en fonctions de ceux du hessien, d'après les formules données par M. Aronhold dans le tome 39 du *Journal de Crelle;* comme cette méthode ne s'appliquerait pas aux formes de la deuxième famille, nous ne la développerons pas.

Deuxième méthode.

Soient B'_{31}, B'_{32}, A'_3 les coefficients de $\xi_3^2\xi_1$, $\xi_3^2\xi_2$, ξ_3^3 dans le hessien de la réduite considérée.

ΔHT étant une réduite de la première catégorie, par rapport à laquelle Λ joue le même rôle que λ par rapport à HT, on aura les inégalités

$$(34) \qquad \begin{cases} B'_{31} < 4\sqrt{3}\Lambda^2, \\ B'_{32} < 9\Lambda^2, \\ A'_3 < 12\sqrt{3}\Lambda^3. \end{cases}$$

De même $(\Delta H + H)T$ étant une réduite de la première catégorie par

rapport à laquelle $\Lambda + \lambda$, joue le même rôle que λ par rapport à HT ; on aura

$$(35) \quad \begin{cases} B'_{31} + B_{31} < 4\sqrt{3}(\Lambda + \lambda)^2, \\ B'_{32} + B_{32} < 9 \quad (\Lambda + \lambda)^2, \\ A'_3 + A_3 < 12\sqrt{3}(\Lambda + \lambda)^3. \end{cases}$$

Des inégalités (34) et (35), on déduit enfin

$$B_{31} < 4\sqrt{3}[(\Lambda + \lambda)^2 + \Lambda^2],$$
$$B_{32} < 9 \quad [(\Lambda + \lambda)^2 + \Lambda^2],$$
$$A_3 < 12\sqrt{3}[(\Lambda + \lambda)^3 + \Lambda^3].$$

XI. — Formes de la troisième famille.

Soit maintenant

$$6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3) = \mathrm{H},$$

qui est l'une des deux canoniques des formes de la troisième famille.

On démontrerait, comme dans le cas de la première et de la deuxième famille, que les formes dérivées de cette canonique n'ont, en général, qu'une seule réduite, et toutes les remarques que nous avons faites à ce sujet trouveraient leur application.

Voyons maintenant à appliquer le théorème de M. Jordan à ces sortes de formes.

Cette fois, le point double de la courbe $\mathrm{H} = 0$ étant aussi un point double de la courbe $\Delta\mathrm{H} = 0$, il y a des réduites dérivées de H qui ne sont pas de la première catégorie et qui ne sont non plus, ni de la deuxième, ni de la troisième, ni de la quatrième catégorie par rapport à ΔH.

Les réduites de H se divisent donc en trois sortes :

1° Celles pour lesquelles on n'a pas, à la fois,

$$A_1 = B_{12} = 0,$$

et qui sont de la première catégorie ;

2° Celles pour lesquelles on a, à la fois,

$$A_1 = B_{12} = 0, \quad B_{13} \lesseqgtr 0,$$

et qui sont de la deuxième catégorie par rapport à ΔH;

3° Enfin celles pour lesquelles on a, à la fois,

$$A_1 = B_{12} = B_{13} = 0,$$

et qui demanderont une étude spéciale.

En ce qui concerne les réduites des deux premières sortes, on trouverait, par un calcul *absolument identique* à celui que nous avons fait pour les formes de la première et de la deuxième famille, les limites des coefficients, et *on retomberait sur les mêmes inégalités à la condition d'appeler* λ, *non plus la somme de la valeur absolue de* 6α *et de celle de* 3β, *mais la somme de la valeur absolue de* 6α *et de celle de* 2β et d'appeler Λ la quantité qui joue, par rapport à ΔH, le même rôle que λ par rapport à H.

Il resterait à trouver les limites des coefficients de la réduite de la troisième sorte

$$\begin{aligned} \Phi = A_2 x_2^3 + A_3 x_3^3 + 3B_{23} x_2^2 x_3 + 3B_{32} x_3 x_2^2 \\ + 3x_1(B_{21} x_2^2 + 2C x_2 x_3 + B_{31} x_3^2); \end{aligned}$$

mais cela est impossible, comme on va le voir aisément.

Faisons, en effet, dans $H = 6\alpha xyz + \beta(x^3 + y^3)$,

$$\begin{aligned} z &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3, \\ x &= \qquad\quad \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3, \\ y &= \qquad\quad \beta_3 x_3 + \gamma_3 x_3. \end{aligned}$$

Pour que la substituti on

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

soit réduite, il faut et il suffit que

$$\begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

soit réduite; que

$$\beta_1 < \tfrac{1}{2}\alpha_1, \quad \gamma_1 < \tfrac{1}{2}\alpha_1$$

et que α_1^2 soit le minimum de la forme

$$(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3)^2 + (\beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3)^2 + (\beta_3 x_2 + \gamma_3 x_3)^2.$$

Supposons que ces conditions soient remplies, et que HT, qui est une réduite, ait ses coefficients entiers; alors il est clair que la substitution

$$T_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda^2}\alpha_1 & \frac{1}{\lambda^2}\beta_1 & \frac{1}{\lambda^2}\gamma_1 \\ 0 & \lambda\beta_2 & \lambda\gamma_2 \\ 0 & \lambda\beta_3 & \lambda\gamma_3 \end{vmatrix},$$

où λ est un nombre entier positif, sera également réduite, et que HT_1 sera une réduite à coefficients entiers.

Si donc on peut trouver une réduite à coefficients entiers de la troisième sorte dérivée de H, on en peut trouver une infinité.

Or je dis qu'on peut toujours en trouver une, pourvu que α^2 soit un nombre entier.

Si, en effet, α^2 est un nombre entier, on peut trouver une infinité de formes Θ à coefficients entiers, algébriquement équivalentes à la forme binaire

$$2\alpha xy = \theta.$$

Parmi les substitutions linéaires en nombre infini qui permettent de passer de θ à Θ, nous pouvons toujours en choisir une

$$x = \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi^2,$$
$$y = \mu_1 \xi_1 + \mu_2 \xi_2,$$

où

$$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 1.$$

telle que

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}(h_1 + k_1 \alpha), \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}(h_2 + k_2 \alpha);$$

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}(h_1 - k_1 \alpha), \quad \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}(h_2 + k_2 \alpha),$$

h_1, h_2, k_1, k_2 étant commensurables et a étant une quantité convenablement choisie.

Les formes Θ se répartissent en un nombre fini de classes; soit

$$S = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix};$$

les formes à coefficients entiers

$$(2\alpha xy)S$$

seront équivalentes à un nombre fini de réduites

$$(2\alpha xy)S.T$$

(T étant une substitution entière unitaire) dont les coefficients seront entiers et où S.T sera une transformation réduite.

La forme

$$(x^3 + y^3)S$$

et, par conséquent aussi, la forme

$$(x^3 + y^3)S.T$$

auront leurs coefficients commensurables avec $\frac{1}{a\sqrt{a}}$. Par conséquent, on pourra toujours trouver un nombre λ incommensurable tel que la forme

$$(\lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3)S.T$$

ait ses coefficients entiers.

Soit alors

$$S.T = \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix};$$

soit μ un nombre quelconque; soit Σ la substitution

$$z = \frac{1}{\lambda^2 \mu^2}(x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3),$$
$$x = \lambda\mu\nu(A_2 x_2 + A_3 x_3),$$
$$y = \lambda\frac{\mu}{\nu}(B_2 x_2 + B_3 x_3),$$

Σ sera une transformation réduite, pourvu que $\frac{1}{\lambda^4\mu^4}$ soit assez petit et que ε_2 et ε_3 soient plus petits que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue et ν convenablement choisi.

Nous dirons que deux substitutions Σ appartiennent au même genre quand elles ne diffèrent que par les valeurs attribuées à μ et à ν

Il est clair que si $\beta\mu^3$ est entier, si, de plus,

$$\nu = 1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0,$$

la forme

$$H.\Sigma$$

aura ses coefficients entiers; car

$$H.\Sigma = (6\alpha xyz)\Sigma + (\beta x^3 + \beta y^3)\Sigma$$

ou

$$H.\Sigma = 3x_1[(2\alpha xy)S.T] + \beta\mu^3[(\lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3)S.T).$$

Par conséquent, il existe toujours des réduites de la troisième sorte, dérivées de H *et à coefficients entiers.*

En donnant à $\beta\mu^3$ toutes les valeurs entières possibles, on obtiendrait toutes les réduites de la troisième sorte, pour lesquelles $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$.

Lorsque ε_2 et ε_3 ne sont pas nuls, il faut, pour que $H\Sigma$ ait ses coefficients entiers, que la forme binaire

$$3(\varepsilon_2 x_2 + \varepsilon_3 x_3)[(2axy)S.T] + \beta\mu^3[(\lambda^3\nu^3 x^3 + \frac{\lambda^3}{\nu^3}y^3)S.T]$$

ait également ses coefficients entiers.

Or les coefficients de cette forme binaire s'écrivent

$$\varepsilon_2 A_i + \varepsilon_3 B_i + \beta\mu^3\nu^3 C_i + \frac{\beta\mu^3}{\nu^3} D_i,$$

A_i, B_i, C_i étant des nombres donnés; donc, pour que tous ces coefficients soient entiers, il faut et il suffit que l'on ait

$$(34)\quad \begin{cases} \varepsilon_2 = h_1 t_1 + h_2 t_2 + h_3 t_3 + h_4 t_4, \\ \varepsilon_3 = k_1 t_1 + k_2 t_2 + k_3 t_3 + k_4 t_4, \\ \beta\mu^3\nu^3 = l_1 t_1 + l_2 t_2 + l_3 t_3 + l^4 t^4, \\ \dfrac{\beta\mu^3}{\nu^3} = m_1 t_1 + m_2 t_2 + m_3 t_3 + m_4 t_4, \end{cases}$$

où les h, les k, les l sont des quantités faciles à calculer, et où les t sont des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs.

Si l'on considère ε_2, ε_3, $\beta\mu^3\nu^3$ et $\frac{\beta\mu^3}{\nu^3}$ comme les coordonnées d'un point, les points qui satisferont aux conditions (34) constitueront un assemblage à la Bravais. Il y aura une infinité de points de cet assemblage satisfaisant aux inégalités

$$-\tfrac{1}{2} < \varepsilon_2 < \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} < \varepsilon_3 < \tfrac{1}{2},$$

qui expriment que la substitution Σ est réduite; mais il n'y en aura qu'un nombre fini qui satisfassent aux inégalités

$$-\tfrac{1}{2} < \varepsilon_2 < \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} < \varepsilon_3 < \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} < \beta\mu^3\nu^3 < \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} < \frac{\beta\mu^3}{\nu^3} < \tfrac{1}{2},$$

et tous les autres s'en déduiront en faisant varier μ et ν.

Conséquence : *Les substitutions réduites Σ, telles que $H\Sigma$ ait ses coefficients entiers, se répartissent en un nombre fini de genres.*

Donc, en résumé :

1° *Les formes à coefficients entiers dérivées de* H *forment un nombre infini de classes. Ces classes seront dites de la première, de la deuxième, de la troisième sorte, selon que les réduites correspondantes seront elles-mêmes de la première, de la deuxième et de la troisième sorte ;*

2° *Les classes de la première et de la deuxième sorte sont en nombre fini;*

3° *Les classes de la troisième sorte sont en nombre infini; mais elles se répartissent en un nombre fini de genres,* à la condition de considérer, comme appartenant au même genre, les classes dont les réduites dérivent de H par des substitutions réduites Σ appartenant au même genre.

Nous aurions maintenant à examiner les formes réellement équivalentes à la canonique

$$\beta x^3 + 3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z + 3\beta x y^2; \tag{7}$$

mais nous nous dispenserons de faire cette étude, qui nous conduirait, par des raisonnements *identiques,* à des résultats *identiques.*

XII. — Formes de la quatrième famille.

Considérons les formes à coefficients entiers, réellement équivalentes à

$$H = 3x^2 z + y^3.$$

Si l'une d'elles F dérive de H par la substitution

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \\ y &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3, \\ z &= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3, \end{aligned}$$

que nous appellerons T, il est aisé de voir :

1° Que α_1, α_2, α_3 sont commensurables entre eux; que, de même, β_1, β_2, β_3 sont commensurables entre eux, ainsi que γ_1, γ_2, γ_3;

2° Que la forme F peut également dériver de H par la substitution

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 & \lambda\alpha_2 & \lambda\alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \frac{1}{\lambda^2}\gamma_1 & \frac{1}{\lambda^2}\gamma_2 & \frac{1}{\lambda^2}\gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Nous pourrons donc écrire la substitution T sous la forme

$$\begin{vmatrix} ha_1 & ha_2 & ha_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ lc_1 & lc_2 & lc_3 \end{vmatrix},$$

où a_1, a_2, a_3 sont des nombres entiers premiers entre eux, de même que b_1, b_2, b_3 et que c_1, c_2, c_3.

Envisageons maintenant les réduites équivalentes à ces formes.

Les réduites seront de la première sorte si A_1 et B_{12} ne sont pas nuls à la fois, de la deuxième sorte si A_1 et B_{12} sont nuls sans que B_{13} le soit, et enfin de la troisième sorte si

$$A_1 = B_{12} = B_{13} = 0.$$

On verrait, comme dans le cas des formes de la troisième famille, que les réduites de la première et de la deuxième sorte sont en nombre fini, et l'on trouverait les limites de leurs coefficients par un calcul tout à fait identique à celui que nous avons fait plus haut pour les formes de la première ou de la deuxième famille.

Si l'on considère, au contraire, les réduites de la troisième sorte, on voit qu'elles dérivent de H par des substitutions de la forme

$$T = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

ou

$$\begin{vmatrix} 0 & ha_2 & ha_3 \\ 0 & kb_2 & kb_3 \\ lc_1 & lc_2 & lc_3 \end{vmatrix},$$

d'où

$$\begin{aligned} H.T = 3h^2 l(a_2x_2 + a_3x_3)^2(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3) \\ + k^3(b_2x_2 + b_3x_3)^3. \end{aligned}$$

Un coefficient quelconque de H.T est de la forme

$$h^2 l A_i + k^3 B_i,$$

où A_i et B_i sont des nombres entiers, de sorte que, pour que les coefficients de H.T soient entiers, il faut qu'on ait

$$\begin{aligned} h^2 l &= \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2, \\ k^3 &= \zeta_1 t_1 + \zeta_2 t_2, \end{aligned}$$

où δ_1, δ_2, ζ_1, ζ_2 sont des quantités commensurables faciles à déterminer, et où t_1, t_2 sont des entiers quelconques, positifs ou négatifs.

Nous dirons que deux substitutions T appartiennent au même genre quand elles ne diffèrent que par les valeurs de h, k, l et qu'elles ne diffèrent pas par la valeur du rapport $\frac{h}{k}$.

Si une substitution est réduite, toutes les substitutions du même genre sont réduites, pourvu que l soit suffisamment petit.

Soient

$$\begin{vmatrix} 0 & ha_2 & ha_3 \\ 0 & kb_2 & kb_3 \\ lc_1 & lc_2 & lc_3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 0 & h'a_2 & h'a_3 \\ 0 & k'b_2 & k'b_3 \\ l'c_1 & l'c_3 & l'c_3 \end{vmatrix}$$

deux substitutions réduites de même genre; soient

$$\begin{aligned} h^2 l &= \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2, \quad & h'^2 l' &= \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2; \\ k^3 &= \zeta_1 t_1 + \zeta_2 t_2, \quad & k'^3 &= \zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2. \end{aligned}$$

On devra avoir

$$hkl = h'k'l',$$

puisque les déterminants des deux substitutions sont égaux à 1 et

$$\frac{h}{k} = \frac{h'}{k'},$$

d'où

$$h^2 l = h'^2 l' \quad \text{et} \quad \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2 = \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2,$$

$$\frac{l'}{l} = \frac{h^2}{h'^2} = \frac{k^2}{k'^2};$$

si t_1, t_2, u_1, u_2 sont entiers, on devra avoir

$$t_1 = u_1 + \lambda_1 \tau, \quad t_2 = u_2 + \lambda_2 \tau,$$

τ étant entier, et λ_1 et λ_2 étant des quantités faciles à calculer.

On aura alors

$$k'^3 = k^3 - (\zeta_1 \lambda_1 + \zeta_2 \lambda_2)\tau,$$

d'où

$$\frac{l'}{l} = \sqrt[3]{\frac{k^6}{k'^6}} = \left(1 - \frac{\zeta_1 \lambda_1 + \zeta_2 \lambda_2}{k^3} \tau\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

Quand τ tend vers l'infini, l' tend vers zéro; si donc on donne à τ une valeur entière suffisamment grande, T sera une substitution réduite et H.T aura ses coefficients entiers.

Si l'on dit que H.T et $\text{H}.\text{T}_1$ sont du même genre toutes les fois que T et T_1 sont du même genre, on voit, d'après ce qui précède, qu'il existe dans un même genre une infinité de réduites.

De plus, les genres eux-mêmes sont en nombre infini.

En effet, pour que la transformation

$$\text{T} = \begin{vmatrix} 0 & ha_2 & ha_3 \\ 0 & kb_2 & kb_3 \\ lc_1 & lc_2 & lc_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & ha_2 & ha_3 \\ 0 & h\lambda b_2 & h\lambda b_3 \\ lc_1 & lc_2 & lc_3 \end{vmatrix}$$

soit réduite et que H.T ait ses coefficients entiers, il faut et il suffit :

1° Que h et l soient convenablement choisis;

2° Que a_2, a_3, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 soient entiers pendant que a_2 et a_3, b_2 et b_3, c_1, c_2 et c_3 sont premiers entre eux;

3° Que la transformation

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \lambda b_2 & \lambda b_3 \end{vmatrix}$$

soit réduite;

4° Que $\frac{c_2}{c_1}$ et $\frac{c_3}{c_1}$ soient plus petits que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue.

Si donc on choisit arbitrairement :

1° Deux entiers premiers entre eux, a_2 et a_3;
2° Deux entiers premiers entre eux, b_2 et b_3;
3° Trois entiers premiers entre eux, c_1, c_2 et c_3;
4° Une quantité quelconque λ,

en s'assujettissant seulement aux conditions suivantes :

1° Que $$\frac{c_2}{c_1} < \frac{1}{2}, \quad \frac{c_3}{c_1} < \frac{1}{2};$$

2° Que la substitution

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \lambda b_2 & \lambda b_3 \end{vmatrix}$$

soit réduite, on pourra toujours trouver pour h et l des valeurs telles, que HT soit une réduite à coefficients entiers.

Un système de quantités

$$a_2, a_3, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, \lambda,$$

choisies de la sorte, définira donc un genre.

Or ce choix peut se faire d'une infinité de manières.

Donc il y a une infinité de genres.

Distinguons maintenant deux sortes de réduites.

Soit F une forme quelconque algébriquement équivalente à H; F pourra se déduire de H par une infinité de transformations S, de telle sorte que

$$F = H.S,$$

mais une seule de ces transformations (que nous appellerons S_1) a pour déterminant 1.

Soit τ une transformation telle que $S.\tau$ soit une substitution réduite, τ_1 une transformation telle que $S_1.\tau_1$ soit une substitution réduite.

Les réduites $F.\tau$ seront toutes équivalentes à F; mais $F.\tau_1$ dérivera seule de H par une substitution réduite de déterminant 1.

Les réduites $F.\tau$ s'appelleront alors les *réduites secondaires*, pendant que $F.\tau_1$ sera la *réduite principale*.

Tout ce que nous avons dit jusqu'ici ne s'applique qu'aux réduites principales, de sorte que nous pouvons énoncer à l'égard de ces réduites les résultats suivants :

1° *Il n'y a, en général, dans chaque classe qu'une seule réduite principale;*

2° *Il y a une infinité de classes;*

3° *Les réduites principales se divisent en trois sortes;*

4° *Celles de la première et de la deuxième sorte sont en nombre fini;*

5° *Celles de la troisième sorte se répartissent en une infinité de genres, et chaque genre comprend une infinité de réduites.*

Occupons-nous maintenant des réduites secondaires.

Soit

$$S_1 = \begin{vmatrix} ha_1 & ha_2 & ha_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ lc_1 & lc_2 & lc_3 \end{vmatrix}$$

une substitution à déterminant 1, telles que

$$F = HS_1.$$

Si l'on pose

$$S = \begin{vmatrix} \lambda ha_1 & \lambda ha_2 & \lambda ha_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ \frac{1}{\lambda^2} lc_1 & \frac{1}{\lambda^2} lc_2 & \frac{1}{\lambda^2} lc_3 \end{vmatrix},$$

on aura

$$F = H.S.$$

Si $S.\tau$ est une substitution réduite, $F.\tau$ sera une des réduites secondaires de F.

Les coefficients de τ dépendent des coefficients de S, c'est-à-dire de λ. Donc les coefficients de la réduite. $F.\tau$ sont des fonctions de λ.

Quand λ varie de $-\infty$ à $+\infty$, la réduite $F.\tau$ varie d'une manière discontinue, comme M. Hermite l'a fait voir dans son Mémoire *Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres*. On passe brusquement d'une réduite à une réduite contiguë.

Comme nous n'avons ici qu'une seule indéterminée λ, les réduites de F pourront être écrites à la suite l'une de l'autre sur une même ligne, de telle sorte que chacune d'elles soit contiguë à celle qui la précède et à celle qui la suit. Elles formeront donc une *chaîne* comme les réduites des formes quadratiques binaires indéfinies, et non un *réseau* comme les réduites des formes quadratiques ternaires indéfinies.

Je dis qu'il n'y a dans chaque classe qu'un nombre fini de réduites secondaires.

En effet, si l'on fait d'abord varier λ entre des limites finies, positives et différentes de o, on ne trouve évidemment qu'un nombre fini de réduites.

Supposons maintenant λ très grand et proposons-nous de trouver la substitution τ, telle que $S.\tau$ soit réduite.

C'est chercher une substitution τ telle que la forme quadratique

$$\Big[(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2\lambda^2h^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2k^2 \\ +(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3)^2\frac{1}{\lambda^4}l^2\Big]\tau$$

soit réduite. Proposons-nous donc de réduire

$$(36)\quad \begin{cases} (a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2\lambda^2h^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2k^2 \\ \qquad +(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3)^2\frac{1}{\lambda^4}l^2. \end{cases}$$

Les trois entiers a_1, a_2, a_3 étant premiers entre eux, il existe toujours

neuf nombres entiers satisfaisant aux conditions suivantes :

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 1,$$
$$a_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2,$$
$$a_2 = \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3,$$
$$a_3 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1.$$

Alors la substitution

$$x_1 = \alpha_1 X_3 + \beta_1 Y_1 + \gamma_1 Y_2,$$
$$x_2 = \alpha_2 X_3 + \beta_2 Y_1 + \gamma_2 Y_2,$$
$$x_3 = \alpha_3 X_3 + \beta_3 Y_1 + \gamma_3 Y_2$$

donnera des relations de la forme

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = X_3,$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = \lambda_1(d_1 Y_1 + d_2 Y_2 + d^3 X_3),$$
$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = \lambda_2(e_1 Y_1 + e_2 Y_2 + e_3 X_3),$$

où d_1 et d_2, e_1 et e_2 sont des nombres entiers premiers entre eux et où d_3 et e_3 peuvent toujours être supposés plus petits que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue.

Soient maintenant δ_1 et δ_2 deux nombres entiers, tels que

$$d_1\delta_1 + d_2\delta_2 = 1,$$

la substitution

$$Y_1 = -d_2 X_1 + \delta_1 X_2$$
$$Y_2 = d_1 X_1 + \delta_2 X_2$$

donne des relations de la forme

$$d_1 Y_1 + d_2 Y_2 = X_2,$$
$$e_1 Y_1 + e_2 Y_2 = \mu(X_1 + f X_2),$$

où l'on peut toujours supposer que f est plus petit que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue.

La transformation

$$\tau = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -d_2 & \delta_1 & 0 \\ d_1 & \delta_2 & 0 \end{vmatrix}$$

est évidemment entière et de déterminant 1. De plus, on a

$$\Big[(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 h^2\lambda^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 k^2 + (c_1x_1 + c_2x_1 + c_3x_3)^2 l^2 \frac{1}{\lambda^4}\Big]\tau$$

$$= h^2\lambda^2 X_3^2 + k^2\lambda_1^2(X_2 + d_3X_3)^2 + l^2\frac{1}{\lambda^4}\lambda_2^2\mu^2\left(X_1 + fX_2 + \frac{e_3}{\mu}X_3\right)^2,$$

et cette forme quadratique est réduite pourvu que

$$k^2\lambda_1^2 < h^2\lambda^2, \quad l^2\lambda_2^2\mu^2\frac{1}{\lambda^4} < k^2\lambda_1^2$$

ou

$$\lambda > \frac{k\lambda_1}{h}, \quad \lambda > \sqrt{\frac{l\lambda_2\mu}{k\lambda_1}}.$$

Donc, toutes les fois que λ sera plus grand qu'une certaine quantité A, $F.\tau$ ne dépendra plus de λ.

De même, toutes les fois que l'on aura

$$0 < \lambda < B,$$

B étant une quantité positive suffisamment petite, $F.\tau$ ne dépendra plus de λ.

Enfin τ ne change pas quand on change λ en $-\lambda$, de sorte qu'il suffit de faire varier λ de 0 à $+\infty$.

λ variant de 0 à B, on a une seule réduite.

λ variant de B à A, on a un nombre fini de réduites.

λ variant de A à $+\infty$, on a une seule réduite.

On n'a donc dans chaque classe qu'un nombre fini de réduites, de la même façon que dans chaque classe des formes quadratiques binaires indéfinies ; mais, grâce à une particularité digne de remarque, les deux cas sont très différents.

Les réduites d'une forme quadratique binaire indéfinie peuvent s'écrire sur un même ligne à la suite l'une de l'autre ; mais cette ligne est indéfinie dans les deux sens, de sorte que chaque réduite s'y reproduit périodiquement une infinité de fois.

Les réduites d'une forme de la quatrième famille, au contraire, forment une *série limitée dans les deux sens,* de sorte qu'on finit par arriver à deux réduites extrêmes, qui sont celles qui correspondent à

$$\lambda > A \quad \text{et} \quad \lambda < B.$$

Par conséquent, les formes de la quatrième famille ne peuvent être reproduites par une transformation semblable arithmétique, c'est-à-dire par une transformation à coefficients entiers et de déterminant 1, ce qu'il était aisé de prévoir.

Voyons maintenant comment les considérations qui précèdent permettront de traiter les questions relatives à l'équivalence des formes de la quatrième famille.

Si l'on se propose seulement de savoir si deux formes données sont équivalentes, c'est-à-dire dérivent l'une de l'autre par une transformation entière de déterminant 1, la considération des réduites principales sera suffisante, et même, à la rigueur, on pourra s'en passer ; car, une forme ne pouvant dériver d'une autre par une transformation de déterminant 1 que d'une seule manière, la question peut se traiter par des procédés purement algébriques.

Mais un problème plus général peut se poser :

Deux formes étant données, déterminer si l'une d'elles est équivalente à l'autre, multipliée par une constante convenable.

La considération des réduites secondaires devient alors nécessaire.

En effet, pour qu'une pareille équivalence ait lieu, il faut et il suffit

que le système des réduites de l'une des formes soit, à un facteur constant près, identique au système des réduites de l'autre forme.

Il est clair que, pour constater cette identité, il suffit de comparer deux réduites de même rang dans chacune des séries et, par exemple, de comparer les réduites extrêmes qu'il est aisé de former.

De là la règle suivante :

Pour savoir si F *est équivalent à* F′, *à un facteur constant près, on forme la réduite de* F *et celle de* F′ *qui correspondent à* λ *infini et l'on examine si ces deux formes ne diffèrent que par un facteur constant.*

XIII. — Formes de la cinquième famille.

Soit la canonique

$$6\alpha xyz + z^3 = H,$$

qui est reproductible par la substitution

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{vmatrix}.$$

Signalons d'abord une différence importante entre le cas actuel et le cas précédent. La canonique n'est reproductible que par des substitutions de déterminant 1. Donc une forme ne peut dériver à la fois de la canonique par des transformations de déterminant 1 et par des transformations de déterminant différent. Donc la distinction que nous avons faite pour la quatrième famille, entre les réduites secondaires et les réduites principales, n'a plus ici de raison d'être.

On voit immédiatement, comme pour la troisième famille, que les réduites sont en nombre infini, qu'elles se divisent en trois sortes, que celles de la première et de la deuxième sorte sont en nombre fini.

Envisageons maintenant les réduites de la troisième sorte et leur distribution en genres.

Soit

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

une transformation réduite qui transforme la canonique en une réduite de la troisième sorte, à coefficients entiers.

Pour que T soit réduite, il faut encore ici :

1° Que

$$S = \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

soit réduite ;

2° Que

$$\alpha_2 < \tfrac{1}{2}\alpha_1, \quad \alpha_3 < \tfrac{1}{2}\alpha_1 ;$$

3° Que α_1^2 soit assez petit.

La forme

$$(6\alpha xyz + z^3)T$$

peut s'écrire

$$3\alpha_1 x_1[(2\alpha yz)S] + (3\alpha_2 x_2 + 3\alpha_3 x_3)[(2\alpha yz)S] + (\gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)^3 = 0,$$

ou bien, si

$$S_1 = \begin{vmatrix} \beta_2\sqrt{\alpha_1} & \beta_3\sqrt{\alpha_1} \\ \gamma_2\sqrt{\alpha_1} & \gamma_3\sqrt{\alpha_1} \end{vmatrix},$$

substitution dont le déterminant est 1, nous l'écrirons

$$F_1 + F_2 + F_3,$$

en posant

$$F_1 = 3x_1[(2\alpha yz)S_1],$$

$$F_2 = \left(3x_2\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 3x_3\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)[(2\alpha yz)S_1]$$

et

$$F_3 = (\gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)^3.$$

S_1 ayant pour déterminant 1, la forme $\frac{F_1}{3x_1}$ devra être une forme réduite quadratique binaire indéfinie, dont les coefficients seront entiers. Donc ces coefficients seront limités, et si l'on considère maintenant la substitution S_1 elle-même, on reconnaîtra que l'on pourra toujours poser

$$\beta_2\sqrt{\alpha_1} = b_2, \quad \beta_3\sqrt{\alpha_1} = b_3, \quad \gamma_2\sqrt{\alpha_1} = c_2, \quad \gamma_3\sqrt{\alpha_1} = c_3$$

ou

$$b_2 c_3 - b_3 c_2 = 1,$$

où les rapports $\frac{b_2}{b_3}$ et $\frac{c_2}{c_3}$ ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs.

Comme $\frac{\alpha^2}{\alpha_1}$ et $\frac{\alpha_3}{\alpha_1}$ sont limités, les coefficients de F_2 seront également limités.

La forme binaire $F_2 + F_3$ devra avoir ses coefficients entiers. Or ces coefficients s'écrivent

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} A_i + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} B_i + \frac{1}{\alpha_1\sqrt{\alpha_1}} C_i = D_i,$$

A_i, B_i et C_i étant des quantités données; A_i et B_i sont entiers, puisque ce sont des coefficients de la forme $\frac{F_1}{3x_1}$; quant aux C_i, ils se réduisent respectivement à

$$c_2^3, \quad c_2^2 c_3 \quad c_2 c_3^2, \quad c_3^3.$$

Or je dis que c_2 et c_3 doivent être commensurables entre eux; en effet,

$$\Delta H = 12\alpha^3 xyz - 6\alpha^2 z^3, \quad \Delta H - 2\alpha^2 H = -8\alpha^2 z^3,$$

d'où il suit que la forme

$$(\Delta H - 2\alpha^2 H)T = -8\alpha^2(\gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)^3$$

doit avoir ses coefficients entiers, et, par conséquent, que $\frac{\gamma_2}{\gamma_3} = \frac{c_2}{c_3}$ (racines d'une équation du troisième ordre, ayant toutes ses racines égales et tous ses coefficients entiers) est commensurable. Donc c_2 et c_3 sont commensurables entre eux. Or on a

$$(2\alpha xy)S_1 = \frac{F_1}{3x_1} = Ax_2^2 + 2Bx_2x_3 + Cx_3^2,$$

où A, B, C sont entiers; or cette forme peut s'écrire

$$A\left(x_2 + \frac{c_3}{c_2}x_3\right)\left(x_2 + \frac{b_3}{b_2}x_3\right).$$

Donc

$$\frac{b_3}{b_2} = +\frac{2B}{A} - \frac{c_3}{c_2} = \text{un nombre commensurable.}$$

Or le discriminant de cette forme binaire quadratique est égal d'une part à α^2, d'autre part à $A^2\left(\frac{b_3}{b^2} - \frac{c_3}{c_2}\right)^2$.

On a donc

$$\alpha = \pm A\left(\frac{b_3}{b_2} - \frac{c_3}{c_2}\right) = \text{un nombre commensurable.}$$

Conséquence. — Si 4S n'est pas puissance quatrième parfaite, il ne peut y avoir de réduite de la troisième sorte.

Prenons maintenant la canonique

$$H = 3\alpha x^2 z + 3\alpha y^2 z + z^3;$$

on ferait voir, tout à fait de la même manière :

1° Que les réduites de la première et de la deuxième sorte sont en nombre fini;

2° Que l'on ne peut avoir de réduite de la troisième sorte, *réellement* équivalentes à H, car ici les points doubles de la courbe H = o sont *imaginaires*.

Comme conséquence, on arrivera au résultat suivant :

Si les points doubles de $H = o$ *sont imaginaires ou si* $4S$ *n'est pas puissance quatrième parfaite, on n'a que des réduites de la première et de la deuxième sorte : on n'a donc qu'un nombre fini de réduites ; ces réduites se répartissent en un nombre fini de classes, et il n'y en a qu'un nombre fini dans chaque classe ; les réduites d'une même classe peuvent se disposer en une chaîne de telle façon que chacune d'elles soit contiguë à celle qui la précède et à celle qui la suit, et, en suivant cette chaîne, on verrait les différentes réduites se reproduire périodiquement.*

Si les points doubles de $H = o$ sont réels et que $4S$ soit puissance quatrième parfaite, nous diviserons les classes dérivées de H en deux catégories :

La première catégorie comprendra les formes qui dérivent de H par une snbstitution

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, de même que $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ et que $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont commensurables entre eux.

La deuxième catégorie comprendra les formes qui ne satisferont pas à cette condition :

Les classes de la deuxième catégorie sont en nombre fini, et tout ce que nous avons dit des cas où $4S$ *n'est pas puissance quatrième parfaite s'applique à ces classes. Par conséquent, dans chaque classe, les réduites se disposent en une chaîne* INDÉFINIE, *où on les voit se reproduire périodiquement.*

Les classes de la première sont en nombre infini et tout ce que nous avons dit de la quatrième famille s'applique à ces classes. Par conséquent, dans chaque classe, les réduites se disposent en une chaîne limitée

présentant deux réduites extrêmes. La seule différence, c'est qu'ici il n'y a aucune distinction à faire entre les réduites principales et les réduites secondaires.

XIV. — Formes de la sixième famille.

Soit la canonique

$$H = 3y^2z + 3x^2y.$$

1° Nous aurons encore ici des réduites principales et des réduites secondaires, car la canonique H est susceptible d'être reproduite, soit par des substitutions de déterminant 1, soit par des substitutions de déterminant différent de 1.

2° L'expression des substitutions qui reproduisent B contient plusieurs paramètres arbitraires; par conséquent, il peut y avoir dans chaque classe plusieurs réduites, et ces réduites forment non plus une *chaîne,* mais un *réseau,* de telle sorte que chaque réduite est contiguë à *toutes* celles qui l'avoisinent dans le réseau.

3° On verrait aisément que l'on ne peut avoir qu'un nombre fini de réduites principales de la première et de la deuxième sorte, tandis que l'on peut avoir un nombre infini de réduites secondaires de la première et de la deuxième sorte.

4° Étudions maintenant les réduites de la troisième sorte; ce sont celles que l'on peut déduire de H par une substitution de la forme

$$T = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix};$$

on verrait aisément que β_2 et β_3 doivent être commensurables entre eux; posons

$$\beta_2 = \lambda b_2, \quad \beta_3 = \lambda b_3,$$

b_2 et b_3 étant deux nombres entiers, premiers entre eux.

Considérons comme étant du même genre deux substitutions réduites

$$T = \begin{vmatrix} 0 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ 0 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \\ \frac{1}{\lambda^2} c_1 & \frac{1}{\lambda^2} c_2 & \frac{1}{\lambda^2} c_3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 a_2 & \lambda_1 a_3 \\ 0 & \lambda_1 b_2 & \lambda_1 b_3 \\ \frac{1}{\lambda_1^2} c_1 & \frac{1}{\lambda_1^2} c_2 & \frac{1}{\lambda_1^2} c_3 \end{vmatrix} = T_1,$$

ne différant que par les valeurs de λ et λ_1.

Considérons comme étant du même genre deux réduites dérivées de H par des substitutions du même genre. On voit alors :

1° Que le nombre des genres est infini.

En effet, supposons que b_2, b_3, a_2, a_3 soient quatre nombres entiers, tels que la transformation

$$\begin{vmatrix} \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ \lambda b_2 & \lambda b_3 \end{vmatrix}$$

soit réduite.

Cela peut se faire d'une infinité de manières.

La forme HT s'écrit alors

$$3c_1 x_1 (b_2 x_2 + b_3 x_3)^2 + 3(c_2 x_2 + c_3 x_3)(b_2 x_2 + b_3 x_3)^2 \\ + 3\lambda^3 (a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 (b_2 x_2 + b_3 x_3).$$

Supposons que c_1 soit un nombre entier ; la forme

$$3c_1 x_1 (b_2 x_2 + b_3 x_3)^2 \\ = 3A x_1 x_2^2 + 6B x_1 x_2 x_3 + 3C x_1 x_3^2$$

sera à coefficients entiers.

La forme

$$3(c_2 x_2 + c_3 x_3)(b_2 x_2 + b_3 x_3)^2 \\ + 3\lambda^3 (a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 (b_2 x_2 + b_3 x_3)$$

devra être à coefficients entiers ; c'est-à-dire que

$$3\frac{c_2}{c_1}\mathrm{A} + 3\lambda^3 a_2^2 b_2,$$

$$\frac{c_2}{c_1}\mathrm{B} + \frac{c_3}{c_1}\mathrm{A} + \lambda^3(a_2^2 b_3 + 2a_2 a_3 b_2),$$

$$\frac{c_2}{c_1}\mathrm{C} + \frac{c_3}{c_1}\mathrm{B} + \lambda^3(2a_2 a_3 b_3 + a_3^2 b_2),$$

$$3\frac{c_3}{c_1}\mathrm{C} + 3\lambda^3 a_3^2 b_3$$

devront être entiers. Or, si l'on considère $\frac{c_2}{c_1}$, $\frac{c_3}{c_1}$ et λ^3 comme les coordonnées d'un point dans l'espace, cela veut dire que ce point est sur l'un des sommets d'un assemblage à la Bravais.

Pour que la substitution T soit réduite, il faut et il suffit que λ^3 soit suffisamment grand et que $\frac{c_2}{c_1}$ et $\frac{c_3}{c_1}$ soient plus petits que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue. Or il y a toujours un nombre infini de sommets d'un assemblage à la Bravais qui satisfont à cette condition. Donc il y a toujours, dans chaque genre, quels que soient a_2, a_3, b_2, b_3, une infinité de réduites, et il est clair qu'on a une infinité de genres.

Dans le cas qui nous occupe, je ne vois aucune raison pour que dans chaque classe les réduites soient en nombre fini.

Donc la méthode générale pour reconnaître l'équivalence de deux formes devient illusoire. Mais ici une méthode spéciale peut permettre d'arriver plus rapidement au résultat.

En effet, soit deux formes F et F_1 de la sixième famille ; je suppose que l'on se propose de reconnaître si F est équivalent à $\alpha\mathrm{F}_1$, α étant une constante.

Soit

$$\mathrm{F} = \mathrm{HT},$$

$$\mathrm{F}_1 = \mathrm{HT}_1,$$

$\alpha\mathrm{F}_1 = \mathrm{F}\tau$, où τ est unitaire et à coefficients entiers.

Si l'on prend les hessiens, on trouve

$$\Delta F = (-6y^3)T,$$
$$\Delta F_1 = (-6y^3)T_1,$$
$$\Delta(\alpha F_1) = \alpha^3 \Delta F_1 = (\Delta F)\tau;$$

on en tire

$$\alpha\sqrt[3]{\Delta F_1} = (\sqrt[3]{\Delta F})\tau.$$

Soit

$$\frac{F}{\sqrt[3]{\Delta F}} = S, \quad \frac{F_1}{\sqrt[3]{\Delta F_1}} = S_1,$$

S et S_1 seront des formes quadratiques, car elles seront, à un facteur constant près,

$$(yz + x^2)T \quad \text{et} \quad (yz + x^2)T_1.$$

On aura alors

$$S_1 = (\alpha S)\tau.$$

Il faudra donc rechercher si S_1 est équivalent à S à un facteur constant près et, dans le cas où l'on aurait constaté cette équivalence, reconnaître si la même substitution qui change αS en S_1 change $\sqrt[3]{\Delta F}$ en $\alpha\sqrt[3]{\Delta F_1}$. Quant à la valeur que doit avoir α, on la déduit aisément des déterminants de S et de S_1.

Nous n'avons rien à ajouter au sujet des formes de la septième famille, qui ont été étudiées par M. Hermite.

XV. — Résumé.

Première et deuxième familles.

Un nombre fini de réduites; un nombre fini de classes.
Une seule réduite en général dans chaque classe.

Troisième famille.

Les classes se partagent en trois sortes :
Chaque classe ne contient en général qu'une seule réduite.

Les réduites se partagent en deux catégories :

Celles de la première et de la deuxième sorte sont en nombre fini.

Celles de la troisième sorte se répartissent en un nombre fini de genres.

Chaque genre contient un nombre infini de classes.

Quatrième famille.

Réduites principales se divisant en trois sortes.

Celles de la première et de la deuxième sorte sont en nombre fini.

Celles de la troisième sorte se répartissent en un nombre infini de genres.

Chaque genre comprend un nombre infini de réduites.

Réduites secondaires se divisant en trois sortes.

Celles de la première et de la deuxième sorte sont en nombre infini.

Celles de la troisième sorte sont également en nombre infini.

Il y a un nombre infini de classes. Chaque classe contient une seule réduite principale et un nombre fini de réduites secondaires. Ces réduites secondaires se disposent en une chaîne limitée; chacune d'elles étant contiguë à celle qui la précède et à celle qui la suit, sauf la dernière réduite, qui n'est contiguë qu'à celle qui la précède, et la première, qui n'est contiguë qu'à celle qui la suit

Cinquième famille.

Premier cas. — Les points doubles sont imaginaires.

Deuxième cas. — Les points doubles sont réels. $4S$ n'est pas puissance 4e parfaite.

(Premier et deuxième cas, ainsi que les classes de la première catégorie du troisième cas :) Un nombre fini de classes.

Chaque classe contient un nombre fini de réduites qui forment une chaîne indéfinie où elles se reproduisent périodiquement, ainsi qu'il arrive dans le cas des formes quadratiques binaires indéfinies.

Troisième cas. — Les points doubles sont réels, et $4S$ est puissance 4e parfaite. Les classes se partagent en deux catégories.

Classes de la première catégorie.

Classes de la deuxième catégorie. — Un nombre fini de genres se répartissant en un nombre infini de classes. Chaque classe contient un nombre fini de réduites formant une chaîne limitée, ainsi qu'il arrive pour la quatrième famille.

Sixième famille.

Les réduites se partagent en :

Réduites principales se divisant en trois sortes.

Celles de la première et de la deuxième sorte sont en nombre fini.

Celles de la troisième sorte se répartissent en un nombre infini de genres, et chaque genre en contient un nombre infini.

Réduites secondaires se divisant en trois sortes.

Celles de la première et de la deuxième sorte sont en nombre infini.

Celles de la troisième sorte se répartissent en un nombre infini de genres, et chaque genre en contient un nombre infini.

Il y a une infinité de classes. Chaque classe comprend une infinité de réduites principales disposées en une chaîne indéfinie, comme dans le cas des formes quadratiques binaires (sauf la reproduction périodique), et une infinité de réduites secondaires disposées en un réseau, comme dans le cas des formes quadratiques ternaires indéfinies.

Les mêmes principes peuvent s'appliquer à toutes les formes, et en particulier aux formes cubiques quaternaires ; mais la variété extrême des cas que je serais obligé de considérer si je voulais aborder l'étude complète de semblables formes m'empêche d'en faire l'application. Faisons toutefois une remarque importante. Quelle est la cause principale des différences que nous avons observées dans les propriétés des diverses familles de formes ? C'est que les unes sont et les autres ne sont pas reproductibles par certaines transformations. On voit donc quel rôle important joue, dans l'étude des propriétés arithmétiques des formes, cette considération purement algébrique de leur reproductibilité par des substitutions linéaires. C'est pourquoi j'ai voulu, dans le commencement de ce travail, étudier complètement les groupes de transformations susceptibles de reproduire une forme cubique quaternaire donnée, parce que la résolution de ce problème doit servir de point de départ au géomètre qui veut étudier ces formes au point de vue arithmétique.

(Extrait du *Journal de l'École Polytechnique*, LIe Cahier ; 1882.)

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

MÉMOIRE

SUR LA

RÉDUCTION SIMULTANÉE D'UNE FORME QUADRATIQUE

ET

D'UNE FORME LINÉAIRE;

PAR M. H. POINCARÉ.

Dans un Mémoire précédent [1], j'ai étudié les questions relatives à la réduction et à l'équivalence des formes cubiques ternaires. J'ai appliqué, pour cela, à ces formes la méthode qui avait conduit M. Hermite à des résultats si intéressants, en ce qui concerne les formes quadratiques et les formes décomposables en facteurs linéaires; H étant une forme algébriquement équivalente à F et la plus simple parmi ces formes; T étant une substitution linéaire telle que la forme quadratique définie

$$(x^2 + y^2 + z^2)\,T$$

soit réduite; j'appelle forme réduite la forme HT. On reconnaît aisément que, en général, toute forme est arithmétiquement équivalente à une ou à plusieurs réduites, et que deux formes données seront équivalentes, pourvu que le système des réduites de la première soit identique au système des réduites de la seconde.

Une pareille méthode est applicable à la forme la plus générale, quels

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, LIe Cahier.

que soient son ordre et le nombre de ces variables. En ce qui concerne les formes cubiques ternaires, j'ai fait

$H = \alpha(x^3 + y^3 + z^3) + 6\beta xyz$	quand le discriminant n'est pas nul.
$H = \alpha(x^3 + y^3) + 6\beta xyz$ ou $H = \alpha x^3 + 3\alpha xy^2 + 3\beta x^2 z + 3\beta y^2 z$	quand le discriminant est nul et que de plus $S \lessgtr 0$, $T \lessgtr 0$ et que la forme est indécomposable.
$H = 3x^2 y + z^3$	quand $S = T = 0$ sans que la forme soit indécomposable.
$H = \alpha z^3 + 6\beta xyz$ ou $H = \alpha z^3 + 3\beta x^2 z + 3\beta y^2 z$	quand $S \gtrless 0$, $T \lessgtr 0$ et que la forme se décompose en un facteur quadratique et un facteur linéaire.
$H = \alpha 3x^2 y + 3zy^2$	quand $S = T = 0$ et que la forme se décompose en un facteur quadratique et un facteurlinéaire.

Quand une forme cubique ternaire n'est pas décomposable en facteurs et que S et T ne sont pas nuls à la fois, cette forme ne peut dériver de H que par un nombre fini de transformations linéaires; pour constater l'équivalence de deux pareilles formes, il suffit par conséquent de calculer les coefficients d'un nombre fini de substitutions, et de constater si ces coefficients sont entiers. La considération des réduites n'est donc pas nécessaire et on se trouve en présence, non plus d'une question d'Arithmétique, mais d'une question d'Algèbre.

Constater si deux formes F et F′, qui sont indécomposables et où S et T sont nuls à la fois, sont arithmétiquement équivalentes, c'est encore une question d'Algèbre; constater si l'on peut trouver un coefficient constant α, tel que F et $\alpha F'$ soient équivalentes, c'est au contraire une question d'Arithmétique, et j'ai fait voir, dans le Mémoire dont je parle, comment on pouvait la résoudre en comparant les deux réduites extrêmes de F et de F′. Mon intention n'est pas de revenir en ce moment sur ce point.

Si maintenant on passe à l'équivalence des formes décomposables en un facteur quadratique et un facteur linéaire, on se trouve en présence d'une véritable question d'Arithmétique, sur laquelle je veux insister un peu. J'ai fait voir qu'on rencontrait dans ce cas des chaînes indéfinies de

réduites se reproduisant périodiquement ainsi qu'il arrive pour les formes quadratiques binaires indéfinies.

Remarquons d'abord que le problème de l'équivalence de deux pareilles formes se ramène à celui de l'équivalence de deux systèmes comprenant chacun une forme quadratique et une forme linéaire. Soient en effet

$$f\varphi \quad \text{et} \quad f_1\varphi_1$$

les deux formes : nous supposons que f et f_1 sont linéaires, φ et φ_1 quadratiques. Pour que ces deux formes soient équivalentes, il faut et il suffit que les deux systèmes

$$\frac{1}{\lambda}f, \quad \lambda\varphi$$

et

$$\frac{1}{\mu}f_1, \quad \mu\varphi_1,$$

où λ et μ sont des constantes choisies de telle sorte que

$$\text{discriminant de } \lambda\varphi = \text{discriminant de } \mu\varphi_1$$

soient arithmétiquement équivalents.

L'étude des formes ternaires de cette sorte est donc ramenée à celle d'un pareil système. C'est ce qui m'a déterminé à entreprendre ce travail.

INVARIANTS DU SYSTÈME.

Je dis que le système d'une forme quadratique ternaire et d'une forme linéaire a deux invariants indépendants. En effet, soient

$$f(x, y, z) \quad \text{et} \quad \varphi(x, y, z)$$

les deux formes du système ; on peut toujours poser

$$\varphi = \alpha f^2 + gh,$$

où g et h sont linéaires pendant que α est une constante. Soient maintenant

$$f_1(x_1, y_1, z_1) \quad \text{et} \quad \varphi_1(x_1, y_1, z_1)$$

un nouveau système analogue : on pourra poser

$$\varphi_1 = \alpha_1 f_1^2 + g_1 h_1.$$

Il est clair que, si

$$\alpha = \alpha_1,$$

on aura

$$\varphi = \varphi_1, \qquad f = f_1,$$

pourvu que l'on ait entre $x, y, z; x_1, y_1, z_1$ les relations linéaires

$$f = f_1,$$
$$g = g_1,$$
$$h = h_1;$$

c'est-à-dire que, si δ est le déterminant des coefficients des trois fonctions linéaires f, g, h; δ_1 le déterminant des coefficients de

$$f_1, g_1, h_1;$$

le système f_1, φ_1 dérivera du système f, φ, par une substitution de déterminant $\frac{\delta_1}{\delta}$.

Donc, pour que les deux systèmes soient algébriquement équivalents, il faut et il suffit que

$$\alpha = \alpha_1,$$
$$\delta = \delta_1,$$

c'est-à-dire qu'il y ait deux invariants indépendants.

Pour ces deux invariants, on peut prendre :

1° Soit le discriminant de φ et l'invariant S de la forme cubique $f\varphi$;

2° Soit le discriminant de φ et celui de $\varphi + mf^2$, m étant un entier quelconque.

RÉDUCTION DU SYSTÈME.

Voici la règle que, dans le Mémoire cité, j'avais adoptée pour la réduction d'un pareil système.

On peut toujours poser

$$\varphi = \alpha f^2 + gh,$$

α étant une constante, g et h des fonctions linéaires.

Je considérais alors la forme quadratique définie

$$f^2 + \lambda^2 g^2 + \frac{1}{\lambda^2} h^2,$$

où λ est un paramètre arbitraire, et la substitution linéaire T qui réduit cette forme. Le système

$$f\text{T}, \quad \varphi\text{T}$$

était alors le système réduit équivalent à

$$f, \quad \varphi.$$

Il est clair que, λ étant arbitraire, il peut y avoir dans chaque classe plusieurs systèmes réduits. Mais je montrais que, si les coefficients de f et de φ sont entiers, ces systèmes sont toujours en nombre fini.

Je crois qu'il y a avantage à modifier un peu cette règle.

Si, en effet, g et h sont réels, on a

$$gh = k^2 - l^2,$$

en posant

$$k = \frac{g+h}{2}, \qquad l = \frac{g-h}{2},$$

et par conséquent

$$\varphi = \alpha f^2 + k^2 - l^2.$$

On aura de même

$$\varphi = \alpha f^2 + \left(\frac{\lambda g + \frac{1}{\lambda} h}{2}\right)^2 - \left(\frac{\lambda g - \frac{1}{\lambda} h}{2}\right)^2,$$

où λ est arbitraire.

Supposons que α soit positif; on considérera la forme quadratique définie

$$\alpha f^2 + \left(\frac{\lambda g + \frac{1}{\lambda} h}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda g - \frac{1}{\lambda} h}{2}\right)^2,$$

et la substitution T qui la réduit.

Le système

$$\varphi T, \quad f T$$

sera le système réduit de φ, f.

Si, au contraire, α est négatif, on envisagera la forme quadratique définie

$$-\alpha f^2 + \left(\frac{\lambda g + \frac{1}{\lambda} h}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda g - \frac{1}{\lambda} h}{2}\right)^2$$

et la substitution T qui la réduit.

$\varphi T, fT$ sera encore le système réduit de φ, f.

Supposons maintenant que g et h soient imaginaires conjugués.

On pourra, d'une infinité de manières, décomposer gh en une somme de deux carrés.

Soit

$$gh = k^2 + l^2;$$

on envisagera la forme

$$\begin{aligned} &\alpha f^2 + k^2 + l^2 \qquad \text{si } \alpha > 0, \\ -&\alpha f^2 + k^2 + l^2 \qquad \text{si } \alpha < 0, \end{aligned}$$

ainsi que la substitution T qui la réduit.

$\varphi T, fT$ sera le système réduit de φ, f.

Voici quels avantages présente ce mode nouveau de réduction :

On sait que, si l'on envisage une forme quadratique indéfinie ternaire, cette forme peut s'écrire

$$X^2 + Y^2 - Z^2 \quad \text{ou} \quad X^2 - Y^2 - Z^2,$$

où X, Y, Z sont linéaires, et que les formes équivalentes

$$(X^2 + Y^2 - Z^2)T \quad \text{ou} \quad (X^2 - Y^2 - Z^2)T$$

sont dites réduites si la forme quadratique définie

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)T$$

est elle-même réduite.

Cela posé, il est clair que, d'après le nouveau mode de réduction, φT sera une réduite de φ quand $\varphi T, fT$ sera un système réduit du système φ, f et, par conséquent, la nouvelle règle de réduction est plus avantageuse au point de vue des applications de la théorie qui nous occupe aux questions les plus générales relatives aux formes quadratiques indéfinies.

Soit

$$\varphi = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy,$$

$$f = \lambda x + \mu y + \nu z.$$

Soit φ_1 la forme adjointe de φ.

Soient a, b, c des quantités définies par les équations

$$\varphi'_x(a, b, c) = 2\lambda,$$

$$\varphi'_y(a, b, c) = 2\mu,$$

$$\varphi'_z(a, b, c) = 2\nu,$$

les quantités a, b, c seront commensurables.

Cela posé, on sait que la forme

$$\tfrac{1}{4}(a\varphi'_x + b\varphi'_y + c\varphi'_z)^2 - \varphi(a, b, c)\,\varphi(x, y, z)$$

a pour discriminant 0 et est, par conséquent, décomposable en deux facteurs linéaires.

De plus,

$$\tfrac{1}{2}(a\varphi'_x + b\varphi'_y + c\varphi'_z) = f.$$

On a donc

$$\varphi = \alpha f^2 + gh,$$

où

$$\alpha = \frac{1}{\varphi(a, b, c)}.$$

Si l'on pose

$$ay - bx = z_1, \qquad cx - az = y_1, \qquad bz - cy = x_1,$$

on aura évidemment

$$(2) \qquad ax_1 + by_1 + cz_1 = 0,$$

et, d'autre part, on trouve, par un calcul facile,

$$\tfrac{1}{4}(a\varphi'_x + b\varphi'_y + c\varphi'_z) - \varphi(a, b, c)\,\varphi(x, y, z) = \varphi_1(x_1, y_1, z_1).$$

On a donc

$$\varphi = \frac{1}{\varphi(a, b, c)} f^2 + \frac{1}{\varphi(a, b, c)} \varphi_1(x_1, y_1, z_1).$$

Quant à $\varphi_1(x_1, y_1, z_1)$, on peut le ramener à une forme binaire à l'aide de l'identité (2) qui donne

$$\varphi_1\left(x_1, y_1, -\frac{ax_1 + by_1}{c}\right),$$

et rien n'est plus facile ensuite que de décomposer φ_1 en deux facteurs linéaires, ou bien encore de le décomposer en une somme de deux carrés ou en une différence de deux carrés.

Premier cas.

$\frac{1}{\varphi(a, b, c)} > 0$, et φ_1 se décompose en une somme de deux carrés positifs.

La forme φ est alors quadratique définie et n'a, par conséquent, en général, qu'une réduite.

Le système f, φ ne peut alors se réduire que d'une seule manière, à savoir par la substitution qui réduit φ.

Deuxième cas.

$\frac{1}{\varphi(a, b, c)} < 0$, et φ_1 se décompose en une somme de deux carrés positifs.

La substitution, qui réduit le système f, φ, est celle qui réduit la forme

$$-\varphi(x, y, z)$$

qui est quadratique définie positive.

Le système f, φ n'a donc, en général, qu'un système réduit.

Troisième cas.

φ_1 se décompose en une somme de deux carrés négatifs.

Supposons, pour fixer les idées,

$$\alpha = \frac{1}{\varphi(a, b, c)} > 0.$$

Comme on a

$$\varphi = \alpha f^2 + \alpha \varphi_1,$$

on aura

$$\varphi = \alpha f^2 - \alpha k^2 - \alpha l^2,$$

k et l étant deux fonctions linéaires, et, par définition, la substitution qui réduit le système f, φ sera celle qui réduit la forme quadratique positive

$$\alpha f^2 + \alpha k^2 + \alpha l^2.$$

Ici encore le système f, φ n'a, en général, qu'un système réduit.

Quatrième cas.

φ_1 se décompose en une différence de deux carrés, c'est-à-dire en un produit de deux fonctions linéaires réelles; ces fonctions linéaires ont des coefficients commensurables entre eux.

Dans le Mémoire cité, j'ai fait voir que, dans ce cas :

1° L'invariant $4S$ est une puissance quatrième parfaite;

2° Les systèmes réduits forment une chaîne limitée à ses deux extrémités, et, pour s'assurer de l'équivalence de deux systèmes, il suffit de constater l'identité des systèmes réduits extrêmes.

Ces résultats, démontrés pour l'ancien mode de réduction, subsistent encore pour le nouveau mode.

Cinquième cas.

φ_1 est décomposable en une différence de deux carrés ou en un produit de deux fonctions linéaires réelles dont les coefficients sont incommensurables entre eux.

J'ai fait voir que l'invariant $4S$ n'est pas puissance quatrième parfaite, et que les systèmes réduits forment une chaîne indéfinie où ils se reproduisent périodiquement, ainsi qu'il arrive pour les réduites des formes quadratiques binaires indéfinies.

Ces résultats subsistent encore avec le mode nouveau de réduction.

Ils permettent de définir des transformations semblables du système f, φ en lui-même.

Sixième cas.

φ_1 est un carré parfait.

Dans ce cas,

$$\varphi(a, b, c) = 0,$$

d'où

$$\alpha = \infty.$$

On ne peut donc plus poser

$$\varphi = \alpha f^2 + \alpha\varphi_1;$$

mais on pourra toujours poser, et cela d'une infinité de manières,

$$\varphi = fg + h^2,$$

g et h étant des fonctions linéaires de x, y, z.

Dans ce cas, la forme $f \times \varphi$, qui est cubique ternaire, est de la sixième famille (*voir* le Mémoire cité), et ses invariants S et T sont nuls.

Nous dirons que le système f, φ est réduit par la substitution qui réduit

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{f^2}{2} + \lambda^2\frac{g^2}{2} + h^2.$$

Si fT, φT est le système réduit de f, φ; φT sera l'une des réduites de φ définie à la façon ordinaire; or φ n'a qu'un nombre fini de réduites; donc le système f, φ n'aura qu'un nombre fini de systèmes réduits.

Ces systèmes formeront, non pas une chaîne, mais un réseau analogue à celui que l'on rencontre dans l'étude des réduites d'une forme quadratique ternaire indéfinie, mais moins compliqué.

Je n'ai rien à ajouter sur les trois premiers cas où le problème est ramené, comme on l'a vu, à la réduction d'une forme quadratique ternaire définie; mais je crois qu'il y a lieu de faire des trois derniers cas une étude plus approfondie.

ÉTUDE SPÉCIALE DU QUATRIÈME CAS.

Je suppose que l'on ait mis la forme φ par le procédé indiqué plus haut sous la forme

$$\alpha f^2 + gh.$$

Je suppose que α soit une constante positive et que g et h soient deux fonctions linéaires dont les coefficients soient commensurables entre eux. Le système

$$f\mathrm{T}, \quad \varphi\mathrm{T},$$

sera réduit, si la forme

$$\psi = \left(\alpha f^2 + \lambda^2\frac{g^2}{2} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{h^2}{2}\right)\mathrm{T}$$

est réduite elle-même.

Nous dirons, avec MM. Korkine et Zolotareff, que la forme ψ est ré-

duite si elle peut se mettre sous la forme

$$\psi = \mu_1(x + \varepsilon_1 y + \zeta_1 z)^2 + \mu_2(y + \zeta_2 z)^2 + \mu_3 z^2,$$

où ε_1, ζ_1 et ζ_2 sont plus petits que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue, et où μ_1 est le minimum absolu de la forme ψ et où μ_2 est le minimum absolu de la forme

$$\mu_2(y + \zeta_2 z)^2 + \mu_3 z^2.$$

Il est clair que, si l'on fait varier λ depuis o jusqu'à l'infini, on trouvera pour les coefficients de T différentes valeurs qui donneront différents systèmes réduits du système f, φ. Mais nous nous bornerons à considérer les systèmes réduits qu'on obtient pour λ très grand et pour λ très petit.

Supposons donc λ très grand. Soit

$$\begin{aligned}
f &= lx + my + nz, && l,\ m,\ n \text{ étant entiers premiers entre eux},\\
g &= \gamma(l_1 x + m_1 y + n_1 z), && l_1,\ m_1,\ n_1 \quad\text{»}\quad\text{»}\\
h &= \delta(l_2 x + m_2 y + n_2 z), && l_2,\ m_2,\ n_2 \quad\text{»}\quad\text{»}
\end{aligned}$$

Soient

$$\begin{aligned}
lm_1 - ml_1 &= \mathrm{DN},\\
mn_1 - nm_1 &= \mathrm{DL},\\
nl_1 - ln_1 &= \mathrm{DM},
\end{aligned}$$

D étant entier et L, M, N étant entiers premiers entre eux.

Je dis que le minimum absolu de la forme

$$\theta = \alpha f^2 + \lambda^2 \frac{g^2}{2} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{h^2}{2}$$

s'obtient si λ est assez grand pour

$$x = \mathrm{L}, \qquad y = \mathrm{M}, \qquad z = \mathrm{N}.$$

En effet, on a toujours

$$\alpha f^2 > \text{ ou } = \alpha,$$

à moins que

$$lx + my + nz = 0,$$

$$\lambda^2 \frac{g^2}{2} > \text{ ou } = \lambda^2 \frac{\gamma^2}{2},$$

à moins que

$$l_1 x + m_1 y + n_1 z = 0.$$

Soit

$$\delta(l_2 L + m_2 M + n_2 N) = \Delta,$$

et supposons que λ soit assez grand pour que

$$\alpha > \frac{1}{\lambda^2} \frac{\Delta^2}{2}$$

et

$$\lambda^2 \frac{\gamma^2}{2} > \frac{1}{\lambda^2} \frac{\Delta^2}{2}.$$

Pour

$$x = L, \qquad y = M, \qquad z = N,$$

on a

$$\theta = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\Delta^2}{2}.$$

Si x, y, z sont entiers sans que

$$lx + my + nz = 0,$$

on a

$$\theta \geq \alpha > \frac{1}{\lambda^2} \frac{\Delta^2}{2}.$$

Si x, y, z sont entiers sans que

$$l_1 x + m_1 y + n_1 z = 0,$$

on a

$$\theta \geq \lambda^2 \frac{\gamma^2}{2} > \frac{\lambda^2}{1} \frac{\Delta^2}{2}.$$

Si x, y, z sont entiers sans être égaux à L, M, N et si l'on a

$$lx + my + nz = l_1 x + m_1 y + n_1 z = 0,$$

on aura

$$x = tL, \qquad y = tM, \qquad z = tN,$$

où t est entier et plus grand que 1.

On aura donc

$$\theta = t^2 \frac{1}{\lambda^2} \frac{\Delta^2}{2} > \frac{1}{\lambda^2} \frac{\Delta^2}{2}.$$

Donc le minimum absolu de θ s'obtient pour

$$x = L, \qquad y = M, \qquad z = N. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Poursuivons la réduction de θ.

Soient $L_1, M_1, N_1; L_2, M_2, N_2$ six nombres entiers tels que

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} L & L_1 & L_2 \\ M & M_1 & M_2 \\ N & N_1 & N_2 \end{vmatrix} = 1.$$

Posons

$$\begin{aligned} x &= L\xi + L_1\eta + L_2\zeta, \\ y &= M\xi + M_1\eta + M_2\zeta, \\ z &= N\xi + N_1\eta + N_2\zeta, \end{aligned}$$

et appelons T_1 la transformation

$$\begin{vmatrix} L & L_1 & L_2 \\ M & M_1 & M_2 \\ N & N_1 & N_2 \end{vmatrix};$$

on aura

$$\begin{aligned} \theta T_1 = \frac{1}{\lambda^2} \frac{h^2}{2} + \alpha \; &[(l\,L_1 + m\,M_1 + n\,N_1)\eta + (l\,L_2 + m\,M_2 + n\,N_2)\zeta]^2 \\ &+ \frac{\lambda^2\gamma^2}{2}[(l_1L_1 + m_1M_1 + n_1N_1)\eta + (l_1L_2 + m_1M_2 + n_1N_2)\zeta]^2. \end{aligned}$$

Les deux derniers carrés ne contiennent plus que η et ζ; ils forment

donc une forme binaire. Réduisons cette forme binaire et pour cela cherchons son minimum absolu.

Soient

$$l_1 L_1 + m_1 M_1 + n_1 N_1 = \quad Q,$$
$$l_1 L_2 + m_1 M_2 + n_1 N_2 = - P.$$

Je dis que les nombres P et Q sont premiers entre eux ; en effet, puisque

$$l_1 L + m_1 M + n_1 N = 0,$$

et que le déterminant (3) est égal à 1, le plus grand commun diviseur de P et de Q diviserait l_1, m_1, n_1 qui sont premiers entre eux.

Je dis que le minimum de la forme binaire

$$\alpha[(lL_1 + mM_1 + nN_1)\eta + (lL_2 + mM_2 + nN_2)\zeta]^2 + \frac{\lambda^2\gamma^2}{2}(Q\eta - P\zeta)^2 = \theta$$

s'obtient si λ est suffisamment grand, pour

$$\eta = P, \qquad \zeta = Q.$$

Je dis que

$$(lL_1 + mM_1 + nN_1)P + (lL_2 + mM_2 + nN_2)Q = \pm D,$$

car un calcul très simple montre que cette expression est égale au déterminant

$$D \begin{vmatrix} L & M & N \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} nm_1 - mn_1 & ln_1 - nl_1 & ml_1 - lm_1 \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix},$$

ou à ce déterminant changé de signe.

Donc, pour

$$\eta = P, \qquad \zeta = Q,$$

on a

$$\theta_1 = \alpha D^2.$$

Supposons que λ soit assez grand pour que

$$\frac{\lambda^2\gamma^2}{2} > \alpha D^2.$$

Si l'on n'a pas

$$Q\eta - P\zeta = 0;$$

on a

$$Q\eta - P\zeta \geqq 1,$$

puisque η et ζ, P et Q sont entiers et par conséquent

$$\theta_1 \geqq \frac{\lambda^2\gamma^2}{2} > \alpha D^2.$$

Si l'on a

$$Q\eta - P\zeta = 0,$$

sans avoir

$$\eta = P, \qquad \zeta = Q,$$

on a

$$\eta = Pt, \qquad \zeta = Qt,$$

t étant un entier plus grand que 1 et, par conséquent,

$$\theta_1 = \alpha t^2 D^2 > \alpha D^2.$$

Donc αD^2 est le minimum absolu de θ_1 et, si l'on pose

$$\eta = P\eta_1 + P_1\zeta_1,$$
$$\zeta = Q\eta_1 + Q_1\zeta_1,$$

où P_1 et Q_1 sont tels que

$$PQ_1 - P_1Q = 1,$$

si l'on appelle T_2 la substitution

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & P_1 \\ 0 & Q & Q_1 \end{vmatrix},$$

la forme $\theta T_1 T_2$ pourra s'écrire

$$\mu_1(\xi + \varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon'_1 \zeta_1)^2 + \mu_2(\eta_1 + \varepsilon_2 \zeta_1)^2 + \mu_3 \zeta_1^2,$$

où μ_1 est le miuimum absolu de la forme ternaire pendant que μ_2 est le minimum absolu de la forme binaire

$$\mu_2(\eta_1 + \varepsilon_2 \zeta_1)^2 + \mu_3 \zeta_1^2.$$

Posons

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_2 + \delta_1 \eta_1 + \delta'_1 \zeta_2, \\ \eta_1 &= \eta_2 + \delta_2 \zeta_2, \\ \zeta_1 &= \zeta_2, \end{aligned}$$

où δ_1, δ'_1, δ_2 sont des nombres entiers déterminés, de telle façon que

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2} &< \delta_2 + \varepsilon_2 < \tfrac{1}{2}, \\ -\tfrac{1}{2} &< \delta'_1 + \varepsilon_1 \delta_2 + \varepsilon'_1 < \tfrac{1}{2}, \\ -\tfrac{1}{2} &< \delta_1 + \varepsilon_1 < \tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

ce qui est toujours possible; appelons T_3 la substitution

$$\begin{vmatrix} 1 & \delta_1 & \delta'_1 \\ 0 & 1 & \delta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il est clair que la forme quadratique définie

$$\theta T_1 T_2 T_3$$

sera réduite, et que, par conséquent, le système réduit cherché sera

$$\varphi T_1 T_2 T_3, \quad f T_1 T_2 T_3.$$

On peut simplifier ce calcul. Supposons, en effet, que la substitution

$$T_1 T_2 T_3$$

équivaille à la suivante

$$\begin{aligned} l_1 x + m_1 y + n_1 z &= H_1 \zeta_2, \\ l x + m y + n z &= H \eta_2 + \varepsilon_1 \zeta_2, \\ l_2 x + m_2 y + n_2 z &= H_2 \xi_2 + \varepsilon_1 \eta_2 + \varepsilon'_1 \zeta_2, \end{aligned}$$

il est clair que l'on devra avoir

$$H_1 = 1, \qquad H = D, \qquad H_2 = \frac{\Delta}{\delta},$$

et, pour que les coefficients de la substitution soient entiers, il faut et il suffit que l'on ait

$$l - \varepsilon_2 l_1 \equiv m - \varepsilon_2 m_1 \equiv n - \varepsilon_2 n_1 \equiv 0 \pmod{D}$$

et

$$\left.\begin{aligned} l_2 - \frac{\varepsilon_1}{D} l + \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{D} - \varepsilon'_1\right) l_1 \equiv m_2 - \frac{\varepsilon_1}{D} m + \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{D} - \varepsilon'_1\right) m_1 \\ \equiv n_2 - \frac{\varepsilon_1}{D} n + \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{D} - \varepsilon'_1\right) n_1 \equiv 0 \end{aligned}\right\} \left(\bmod \frac{\Delta}{\delta}\right).$$

Je dis que les trois premières congruences peuvent toujours être résolues.

Les trois nombres l_1, m_1, n_1 étant premiers entre eux, on pourra toujours trouver trois nombres λ_1, μ_1, ν_1, tels que

$$l_1 \lambda_1 + m_1 \mu_1 + n_1 \nu_1 = 1.$$

Les trois congruences donnent alors

$$\varepsilon_2 \equiv l \lambda_1 + m \mu_1 + n \nu_1 \pmod{D}.$$

On trouvera aisément un nombre ε_2 satisfaisant à cette condition, ainsi qu'aux inégalités

$$-\frac{D}{2} < \varepsilon_2 < \frac{D}{2}.$$

Je dis que ce nombre satisfera aux trois congruences

$$l - \varepsilon_2 l_1 \equiv m - \varepsilon_2 m_1 \equiv n - \varepsilon_2 n_1 \equiv 0 \pmod{D}.$$

On a, en effet,

$$l - \varepsilon_2 l_1 \equiv l - (l\lambda_1 + m\mu_1 + n\nu_1)l_1 \pmod{D}$$

ou

$$l - \varepsilon_2 l_1 \equiv l - l(l_1\lambda_1 + m_1\mu_1 + n_1\nu_1) + \mu_1(ml_1 - lm_1) + \nu_1(nl_1 - ln_1)$$

ou

$$l - \varepsilon_2 l_1 \equiv l - l - \mu_1 DN + \nu_1 DM \equiv 0 \pmod{D}.$$

Soit donc

$$l - \varepsilon_2 l_1 = l_3 D, \qquad m - \varepsilon_2 m_1 = m_3 D, \qquad n - \varepsilon_2 n_1 = n_3 D.$$

Je dis que les nombres l_3, m_3, n_3 sont premiers entre eux ; en effet, leur plus grand commun diviseur devrait diviser L, M, N, qui sont premiers entre eux.

Les trois dernières congruences deviennent

$$(4) \qquad \left.\begin{array}{r} l_2 - \varepsilon_1 l_3 - \varepsilon'_1 l_1 \equiv m_2 - \varepsilon_1 m_3 - \varepsilon'_1 m_1 \\ \equiv n_2 - \varepsilon_1 n_3 - \varepsilon'_1 n_1 \equiv 0 \end{array}\right\} \left(\mathrm{mod}\, \frac{\Delta}{\delta}\right).$$

On pourra toujours trouver trois nombres λ_3, μ_3, ν_3 satisfaisant aux conditions

$$\lambda_3 l_1 + \mu_3 m_1 + \nu_3 n_1 = 0,$$
$$\lambda_3 l_3 + \mu_3 m_3 + \nu_3 n_3 = 1,$$

d'où

$$\lambda_3 l + \mu_3 m + \nu_3 n = D.$$

Les trois congruences (4) donnent alors

$$(5) \qquad (\lambda_3 l_2 + \mu_3 m_2 + \nu_3 n_2) \equiv \varepsilon_2,$$

$$(6) \quad (\lambda_1 l_2 + \mu_1 m_2 + \nu_1 n_2) - \varepsilon_1(\lambda_1 l_3 + \mu_1 m_3 + \nu_1 n_3) \equiv \varepsilon'_1 \quad \left(\mathrm{mod}\, \frac{\Delta}{\delta}\right).$$

La congruence (5) donnera ε_1, et la congruence (6) ε'_1 ; on aura soin de choisir ces deux nombres de telle façon que leur valeur absolue soit plus petite que la moitié de $\frac{\Delta}{\delta}$.

Cela posé, le système réduit s'écrira

$$\alpha(D\eta_2 + \varepsilon_2\zeta_2)^2 + \gamma\delta\left(\frac{\Delta}{\delta}\xi_2 + \varepsilon_1\eta_2 + \varepsilon'_1\zeta_2\right)\zeta_2,$$

$$D\eta_2 + \varepsilon_2\zeta_2.$$

Les calculs de réduction du système se partagent donc en trois parties :

1° Calcul de α, γ, δ, l, m, n, l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2, Δ, D, où l'on se borne à des opérations purement algébriques et à des recherches de plus grand commun diviseur;

2° Calcul de λ_1, μ_1, ν_1, λ_3, μ_3, ν_3, où l'on a à résoudre des congruences linéaires très simples ;

3° Calcul de ε_2, ε_1, ε'_1, où l'on n'a qu'à chercher les restes de trois divisions de nombres entiers.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que α était positif et que l, m, n étaient premiers entre eux.

Si α était négatif, on changerait le signe de φ.

Si l, m, n avaient un plus grand commun diviseur D, on poserait

$$f = f'D,$$

d'où

$$\varphi = \alpha D^2 f'^2 + gh,$$

et de toutes façons on serait ramené au cas que nous avons étudié.

Remarque. — Les considérations qui précèdent montrent suffisamment qu'un pareil système n'est reproduit par aucune substitution linéaire.

Exemple. — Soit à réduire le système

$$\varphi = x^2 + y^2 - 4z^2,$$

$$f = x + 3y - 2z.$$

Ici l'on a

$$l = 1, \qquad m = 3, \qquad n = -2;$$

d'où

$$a = 1, \qquad b = 6, \qquad c = 1.$$

On trouve aisément

$$9\varphi - f^2 = +(x - 2z)(8x - 6y + 20z);$$

d'où

$$\alpha = \tfrac{1}{9}, \qquad \gamma\delta = \tfrac{2}{9};$$

$$l_1 = 1, \qquad m_1 = 0, \qquad n_1 = -2,$$

$$l_2 = 4, \qquad m_2 = -3, \qquad n_2 = 10;$$

$$\mathrm{L} = -2, \qquad \mathrm{M} = 0, \qquad \mathrm{N} = -1, \qquad \mathrm{D} = 3;$$

$$\frac{\Delta}{\delta} = -18.$$

La transformation $\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2\mathrm{T}_3$ s'écrira alors

$$\begin{aligned} l_1x + m_1y + n_1z &= \zeta_2, \\ lx + my + nz &= 3\eta_2 + \varepsilon_2\zeta_2, \\ l_2x + m_2y + n_2z &= -18\xi_2 + \varepsilon_1\eta_2 + \varepsilon'_1\zeta_2; \end{aligned}$$

ε_2 sera déterminé par les trois congruences

$$\left.\begin{aligned} l - \varepsilon_2 l_1 &= 1 - \varepsilon_2 \equiv 0 \\ m - \varepsilon_2 m_1 &= 3 \equiv 0 \\ n - \varepsilon_2 n_1 &= -2 + 2\varepsilon_2 \equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod 3.$$

Il n'est pas besoin ici de chercher les nombres λ_1, μ_1, ν_1, pour voir que ces congruences se réduisent à

$$\varepsilon_2 \equiv 1 \pmod 3,$$

ou

$$\varepsilon_2 = 1.$$

Quant à l_3, m_3, n_3, on trouve immédiatement

$$l_3 = 0, \qquad m_3 = 1, \qquad n_3 = 0,$$

d'où les trois congruences

$$\left.\begin{array}{r} 4-\quad \varepsilon_1 \equiv 0 \\ -3-\quad \varepsilon'_1 \equiv 0 \\ 10+2\varepsilon'_1 \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{18},$$

d'où

$$\varepsilon'_1 = 4, \qquad \varepsilon_1 = -3.$$

Le système réduit cherché est alors

$$\alpha(\mathrm{D}\eta_2 + \varepsilon_2\zeta_2)^2 + \gamma\delta\zeta_2\left(\frac{\Delta}{\delta}\xi_2 + \varepsilon_1\eta_2 + \varepsilon'_1\zeta_2\right)$$
$$\mathrm{D}\eta_2 + \varepsilon_2\zeta_2,$$

c'est-à-dire

$$\tfrac{1}{9}(3\eta_2 + \zeta_2)^2 + \tfrac{2}{9}\zeta_2(-18\xi_2 + 3\eta_2 + 4\zeta_2)$$
$$3\eta_2 + \zeta_2,$$

ou, revenant aux variables x, y, z, c'est-à-dire changeant ξ_2 en x, η_2 en y, ζ_2 en z,

$$-4xz + y^2 + z^2$$
$$3y + z;$$

on trouverait de même le système réduit extrême qui correspond aux valeurs très petites du paramètre arbitraire λ et l'on arriverait au résultat suivant :

Pour que deux systèmes se composant chacun d'une fonction linéaire et d'une forme quadratique, ayant mêmes invariants et rentrant tous deux dans le quatrième cas, soient arithmétiquement équivalents, il faut et il suffit que les deux systèmes réduits extrêmes de l'un (trouvés comme il a été dit plus haut, l'un pour les valeurs très petites de λ, l'autre pour les valeurs très grandes de ce paramètre) soient identiques aux deux systèmes réduits extrêmes de l'autre.

ÉTUDE SPÉCIALE DU CINQUIÈME CAS.

Supposons que φ se mette sous la forme

$$\alpha f^2 + gh,$$

où g et h sont des fonctions linéaires dont les coefficients sont réels, mais non commensurables entre eux.

Pour réduire le système f, φ, on cherche la transformation qui réduit la forme définie

$$(6) \qquad \alpha f^2 + \frac{\lambda^2}{2} g^2 + \frac{1}{2\lambda^2} h^2 = \theta;$$

et pour cela il faut d'abord chercher le minimum absolu de cette forme.

Je dis que, quels que soient λ, g, h, et f, on peut toujours choisir α assez petit pour que ce minimum absolu s'obtienne en faisant

$$g = h = 0$$

ou bien, si

$$a = \lambda_1 \delta, \qquad b = \mu_1 \delta, \qquad c = \nu_1 \delta$$

(où λ_1, μ_1, ν_1 sont des entiers premiers entre eux), en faisant

$$x = \lambda_1, \qquad y = \mu_1, \qquad z = \nu.$$

Si en effet

$$f = lx + my + nz,$$

$$l\lambda_1 + m\mu_1 + n\nu_1 = \Delta, \quad l\lambda_2 + m\mu_2 + n\nu_2 = \Delta_2, \quad l\lambda_3 + m\mu_3 + n\nu_3 = \Delta_3,$$

la valeur de la forme (6) pour

$$x = \lambda_1, \qquad y = \mu_1, \qquad z = \nu_1$$

sera

$$\alpha \Delta^2.$$

Supposons maintenant que le plus grand commun diviseur des coefficients de gh soit E. Le produit gh ne peut devenir nul pour des valeurs

entières de g et de h que si g et h s'annulent à la fois, et si cela n'a pas lieu, il est au moins égal à E.

Donnons donc à x, y, z des valeurs entières différentes de λ_1, μ_1 et ν_1; si g et h ne s'annulent pas à la fois, on aura

$$\theta > \frac{\lambda^2}{2} g^2 + \frac{1}{2\lambda^2} h^2 > gh > \mathrm{E}.$$

Si g et h s'annulent à la fois, on aura

$$x = \lambda_1 t, \qquad y = \mu_1 t, \qquad z = \nu_1 t,$$

où t est entier et > 2, d'où

$$\theta = \alpha\Delta^2 t^2 > \alpha\Delta^2.$$

Si donc α est assez petit pour que

$$\alpha\Delta^2 < \mathrm{E},$$

le minimum de θ sera $\alpha\Delta^2$.

Cela posé, prenons un système f, φ quelconques; il pourra se présenter deux cas :

Premier cas.

$$\alpha\Delta^2 < \mathrm{E}.$$

Dans ce cas le minimum de θ se trouve immédiatement, ainsi qu'on vient de le voir.

Deuxième cas.

$$\alpha\Delta^2 > \mathrm{E} \quad \text{ou} \quad = \mathrm{E}.$$

Dans ce cas on remarquera que l'on peut remplacer le système donné f, φ par le système

$$f;\ \varphi + \mu f^2,$$

où μ est un nombre quelconque.

En effet :

1° Pour que deux systèmes f, φ et f_1, φ_1 soient équivalents, il faut et il suffit que les deux systèmes

$$f, \quad \varphi + \mu f^2 \quad \text{et} \quad f_1, \quad \varphi_1 + \mu f_1^2$$

soient équivalents.

2° Les transformations linéaires que reproduisent le système f, φ sont les mêmes que celles qui reproduisent le système, f et $\varphi + \mu f^2$; de sorte que, au double point de vue de l'équivalence des systèmes et des transformations semblables, il est indifférent d'envisager le système f, φ ou bien le système f et $\varphi + \mu f^2$.

On choisira alors μ de telle sorte que

$$(\alpha + \mu)\Delta^2 < \mathrm{E},$$

et l'on sera ramené au premier cas.

Revenons donc au premier cas :

Le minimum absolu de θ s'obtient pour

$$x = \lambda_1, \qquad y = \mu_1, \qquad z = \nu_1.$$

Soient donc λ_2, μ_2, ν_2, λ_3, μ_3, ν_3 six entiers tels que

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix} = 1.$$

Posons

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \lambda_3 \zeta, \\ y &= \mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \mu_3 \zeta, \\ z &= \nu_1 \xi + \nu_2 \eta + \nu_3 \zeta, \end{aligned}$$

et appelons T_1 cette transformation linéaire.

On aura

$$\theta \mathrm{T}_1 = \alpha[\Delta\xi + (\lambda_2 l + \mu_2 m + \nu_2 n)\eta + (\lambda_3 l + \mu_3 m + \nu_3 n)\zeta^3] + \left(\frac{\lambda^2}{2} g^2 + \frac{1}{\lambda^2} a^2\right)\mathrm{T}_1$$

et

$$\varphi T_1 = \alpha[\Delta\xi + (\lambda_2 l + \mu_2 m + \nu_2 n)\eta + (\lambda_3 l + \mu_3 m + \nu_3 n)\zeta]^2 + gh T_1.$$

Les formes

$$\left(\frac{\lambda^2}{2} g^2 + \frac{1}{\lambda^2} h^2\right) T_1 \quad \text{et} \quad gh T_1$$

ne contiennent que η et ζ et sont par conséquent binaires.

Pour achever la réduction, il faut :

1° Chercher une transformation T_2 de la forme

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 + k_0 \eta_1 + k'_0 \zeta_1, \\ \eta &= \phantom{\xi_1 +{}} k_1 \eta_1 + k'_1 \zeta_1, \\ \zeta &= \phantom{\xi_1 +{}} k_2 \eta_1 + k'_2 \zeta_1, \end{aligned}$$

telle que la forme

$$\left(\frac{\lambda^2}{2} g^2 + \frac{1}{\lambda^2} h^2\right) T_1 T_2,$$

soit réduite, et que

$$-\frac{\Delta}{2} < \Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2 + \Delta k_0 < \frac{\Delta}{2},$$

$$-\frac{\Delta}{2} < \Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2 + \Delta k'_0 < \frac{\Delta}{2},$$

ce qui est toujours possible;

2° Appliquer cette transformation T_2 au système

$$f T_1, \quad \varphi T_1.$$

Cherchons donc la substitution T_2.

Pour calculer k_0, il suffit de chercher un nombre entier qui soit égal à

$$-\frac{\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2}{\Delta}$$

à $\pm \frac{1}{2}$ près. On calculerait de même k'_0.

Il reste à calculer les quatre coefficients

$$\begin{vmatrix} k_1 & k'_1 \\ k_2 & k'_2 \end{vmatrix},$$

qui forment une substitution linéaire binaire entre η, ζ et η_1, ζ_1; cette substitution, nous l'appellerons τ.

Elle doit être telle que la forme binaire définie

$$\left(\frac{\lambda^2}{2}g^2 + \frac{1}{\lambda^2}h^2\right)\mathrm{T}_1\tau$$

soit réduite, c'est-à-dire que la forme binaire indéfinie

$$gh\mathrm{T}_1\tau$$

soit réduite.

Le problème de la réduction du système f, φ est donc ramené à celui de la réduction de la forme binaire

$$gh\mathrm{T}_1,$$

et l'on trouve

$$\begin{aligned} &\text{système réduit du système } f, \varphi \\ &\quad = \text{le système formé de } \Delta\xi_1 + (\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2 + \Delta k_0)\eta_1 \\ &\qquad + (\Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2 + \Delta k'_0)\zeta_1 \quad \text{et de} \quad \alpha[\Delta\xi_1 + (\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2 + \Delta k_0)\eta_1 \\ &\qquad\qquad + (\Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2 + \Delta k'_0)\zeta_1]^2 \\ &\qquad\qquad + \text{réduite de } gh\mathrm{T}_1. \end{aligned}$$

CALCUL DE $g.h.\mathrm{T}$.

Le calcul de α, de λ_1, μ_1, ν_1, λ_2, μ_2, ν_2, λ_3, μ_3, ν_3, k_0, k'_0 ne présentant pas de difficulté, je passe immédiatement au calcul des coefficients de la forme binaire $gh\mathrm{T}$.

Soient

$$\varphi = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'xz + 2\mathrm{B}''xy$$

et

$$\varphi_1 = \text{forme adjointe de } \varphi,$$
$$\varphi_1 = A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 + 2B_1 yz + 2B'_1 xz + 2B''_1 xy;$$

d'où

$$A_1 = A'A'' - B^2, \qquad A'_1 = AA'' - B'^2, \qquad A''_1 = AA' - B''^2,$$
$$B_1 = B'B'' - AB, \qquad B'_1 = B''B - A'B', \qquad B''_1 = BB' - A''B''.$$

On sait que nous avons défini a, b, c par les conditions

$$\varphi'_x(a, b, c) = 2l,$$
$$\varphi'_y(a, b, c) = 2m,$$
$$\varphi'_z(a, b, c) = 2n;$$

on en tire aisément, pour les valeurs de a, b, c, les expressions suivantes, en appelant H le discriminant de φ,

$$aH = A_1 l + B''_1 m + B'_1 n,$$
$$bH = B''_1 l + A'_1 m + B_1 n,$$
$$cH = B'_1 l + B_1 m + A''_1 n.$$

Si δ_1 est le plus grand commun diviseur de aH, bH et cH, on aura

$$\lambda_1 = \frac{aH}{\delta_1}, \qquad \mu_1 = \frac{bH}{\delta_1}, \qquad \nu_1 = \frac{cH}{\delta_1},$$

et les valeurs de λ_2, μ_2, ν_2, λ_3, μ_3, ν_3 s'en déduiront aisément.

On sait que la forme

$$(lx + my + nz)^2 - \varphi(x, y, z)\,\varphi(a, b, c)$$

se décompose en deux facteurs linéaires et est égale à

$$-gh\,\varphi(a, b, c).$$

Or, d'autre part, cette forme s'écrit

$$\begin{aligned}A_1(bz-cy)^2+A'_1(cx+az)^2+A''_1(ay+bx)^2 \\ +2B(ay-bz)(cx-az) \\ +2B'(ay-bx)(bz-cy)+2B''(bz-cy)(cx-az),\end{aligned}$$

ainsi qu'on l'a vu plus haut, ou bien

$$\varphi_1[(bz-cy),(cx-az),(ay-bx)];$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}gh &= -\frac{\varphi_1[(bz-cy),(cx-az),(ay-bx)]}{\varphi(a,b,c)} \\ &= -\frac{\varphi_1[(\mu_1 z-\nu_1 y),(\nu_1 x-\lambda_1 z),(\lambda_1 y-\mu_1 x)]}{\varphi(\lambda_1,\mu_1,\nu_1)}.\end{aligned}$$

Une première remarque importante, c'est que

$$\varphi(\lambda_1,\mu_1,\nu_1)=\frac{\varphi_1(l,m,n)H}{\delta_1^2}.$$

Posons donc

$$-\frac{1}{\varphi(\lambda_1,\mu_1,\nu_1)}=\gamma.$$

Considérons la transformation

$$T_1=\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3\end{vmatrix},$$

et appelons L_1, M_1, N_1 les mineurs qui correspondent à λ_1, μ_1, ν_1, de telle sorte que

$$\begin{aligned}\lambda_1 L_1+\mu_1 M_1+\nu_1 N_1&=1, \\ \lambda_2 L_1+\mu_2 M_1+\nu_2 N_1&=0, \\ \lambda_3 L_1+\mu_3 M_1+\nu_3 N_1&=0.\end{aligned}$$

Appelons de même L_2, M_2, N_2; L_3, M_3, N_3 les mineurs, tels que

$$\begin{aligned} \lambda_1 L_2 + \mu_1 M_2 + \nu_1 N_2 &= 0, & \lambda_1 L_3 + \mu_1 M_3 + \nu_1 N_3 &= 0, \\ \lambda_2 L_2 + \mu_2 M_2 + \nu_2 N_2 &= 1, & \lambda_2 L_3 + \mu_2 M_3 + \nu_2 N_3 &= 0, \\ \lambda_3 L_2 + \mu_3 M_2 + \nu_3 N_2 &= 0, & \lambda_3 L_3 + \mu_3 M_3 + \nu_3 N_3 &= 1. \end{aligned}$$

On aura évidemment

$$\begin{aligned} \mu_1 z - \nu_1 y &= L_3 \eta - L_2 \zeta, \\ \nu_1 x - \lambda_1 z &= M_3 \eta - M_2 \zeta, \\ \lambda_1 y - \mu_1 x &= N_3 \eta - N_2 \zeta; \end{aligned}$$

d'où

$$ghT_1 = \gamma \varphi_1[(L_3 \eta - L_2 \zeta), (M_3 \eta - M_2 \zeta), (N_3 \eta - N_2 \zeta)].$$

Supposons que

$$ghT_1 = P\eta^2 + 2Q\eta\zeta + R\zeta^2,$$

il viendra

$$\begin{aligned} P &= \gamma \varphi_1(L_3, M_3, N_3), \\ R &= \gamma \varphi_1(L_2, M_2, N_2), \\ 2Q &= \gamma[L_3 \varphi'_{1x}(L_2, M_2, N_2) + M_3 \varphi'_{1y}(L_2, M_2, N_2) + N_3 \varphi'_{1z}(L_2, M_2, N_2)]. \end{aligned}$$

CALCUL DU DISCRIMINANT $Q^2 - RP$.

On a

$$\frac{1}{\gamma^2}(Q^2 - RP) = \frac{1}{4}(L_3 \varphi'_{1x} + M_3 \varphi'_{1y} + N_3 \varphi'_{1z})^2 - \varphi_1(L_3, M_3, N_3) \varphi_1(L_2, M_2, N_2).$$

Remarquons que l'on a identiquement

$$\text{forme adjointe de } \varphi_1 = \varphi H.$$

On a donc, d'après une remarque déjà faite,

$$\frac{1}{\gamma^2}(Q^2 - RP) = H \varphi[(N_3 M_2 - N_2 M_3), (L_3 N_2 - L_2 N_3), (M_3 L_2 - M_2 L_3)]$$

ou

$$\frac{1}{\gamma^2}(Q^2 - RP) = H\varphi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) = \frac{H^2}{\delta_1^2}\varphi_1(l, m, n)$$

ou enfin

$$Q^2 - RP = -\gamma H = \frac{\delta_1^2}{G}$$

si $\varphi_1(l, m, n) = G$.

Calculons maintenant le plus grand commun diviseur de P, Q, R. Si E est le plus grand commun diviseur des trois nombres entiers

$$\varphi_1(L_3, M_3, N_3), \quad \varphi_1(L_2, M_2, N_2),$$
$$\tfrac{1}{2}[L_2\varphi'_{1x}(L_3, M_3, N_3) + M_2\varphi'_{1y}(L_3, M_3, N_3) + N_2\varphi'_{1z}(L_3, M_3, N_3)],$$

γE sera le plus grand commun diviseur de P, Q, R, de sorte que le déterminant de la forme primitive ψ de laquelle ghT_1 est dérivée s'écrira

$$\frac{-H}{\gamma E^2} = \frac{H^2 G}{\delta_1^2 E^2}.$$

Ce déterminant doit être un nombre entier.

Une fois les coefficients de ghT_1 connus, les procédés ordinaires de réduction des formes binaires donnent immédiatement les coefficients de la substitution τ, ce qui permet d'achever complètement la réduction du système.

TRANSFORMATIONS SEMBLABLES.

L'un des problèmes les plus intéressants que permet de résoudre la réduction des formes ou des systèmes de formes est la recherche des substitutions semblables.

Soit f, φ un système de formes quelconques, algébriquement équivalent à un système canonique quelconque F, Φ, de telle sorte que

$$f = F\tau, \qquad \varphi = \Phi\tau.$$

Dans certains cas, les seuls qui soient intéressants au point de vue arithmé-

tique, on pourra trouver une infinité de substitutions τ qui permettent de passer du système F, Φ au système f, φ; supposons donc qu'on ait à la fois

$$f = F\tau_1, \qquad \varphi = \Phi\tau_1,$$
$$f = F\tau_2, \qquad \varphi = \Phi\tau_2.$$

Soient T_1 et T_2 deux substitutions à coefficients entiers, telles que les formes quadratiques définies

$$(x^2 + y^2 + z^2)\,\tau_1 T_1,$$
$$(x^2 + y^2 + z^2)\,\tau_2 T_2$$

soient réduites ; les systèmes

$$fT_1, \quad \varphi T_1,$$
$$fT_2, \quad \varphi T_2$$

seront par définition des systèmes réduits du système f, φ.

Si ces deux systèmes sont identiques, de telle sorte que

$$fT_1 = fT_2, \qquad \varphi T_1 = \varphi T_2,$$

il est clair que

$$fT_1 T_2^{-1} = f, \qquad \varphi T_1 T_2^{-1} = \varphi,$$

de telle sorte que

$$T_1 T_2^{-1}$$

sera une substitution semblable du système f, φ.

Si donc, dans la réduction successive d'un système, on rencontre deux systèmes réduits identiques, on pourra en déduire une substitution semblable.

Je dis que, réciproquement, on obtiendra ainsi toutes les substitutions semblables. En effet, soit S une pareille substitution; on a, par hypothèse,

$$fS = f, \qquad \varphi S = \varphi.$$

Soit

$$f = F\tau_1, \qquad \varphi = \Phi\tau_1$$

et

$$\text{forme } (x^2 + y^2 + z^2)\,\tau_1 T_1 = \text{réduite},$$

de telle sorte que $f T_1$, φT_1 soit un système réduit de f, φ.

On aura évidemment

$$f = F\tau_1 S, \qquad \varphi = \Phi\tau_1 S;$$

la forme

$$(x^2 + y^2 + z^2)\,\tau_1 S . S^{-1} T_1$$

sera réduite, et, par conséquent, le système

$$f S^{-1} T_1, \quad \varphi S^{-1} T_1$$

sera réduit. De plus, il est clair qu'il sera identique à $f T_1$, φT_1, c'est-à-dire que la substitution S pourra s'obtenir par le procédé exposé plus haut.

Appliquons donc ce procédé au cas qui nous occupe. Soient

$$f T_2, \quad \varphi T_2,$$
$$f T_3, \quad \varphi T_3$$

deux systèmes réduits de f, φ. Le premier de ces systèmes réduits s'écrira, en conservant les anciennes notations,

$$\Delta\xi_1 + (\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2 + \Delta k_0)\,\eta_1 + (\Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2 + \Delta k'_0)\,\zeta_1$$

et

$$[\Delta\xi_1 + (\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2 + \Delta k_0)\,\eta_1 + (\Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2 + \Delta k'_0)\,\zeta_1]^2 + gh T_1 \tau,$$

$gh T_1 \tau$ étant une des réduites de $gh T_1$; le second s'écrirait d'une façon analogue

$$\Delta\xi_2 + (\Delta_2 k''_1 + \Delta_3 k''_2 + \Delta k''_0)\,\eta_2 + (\Delta_2 k'''_1 + \Delta_3 k'''_2 + \Delta k'''_0)\,\zeta_2$$

et

$$[\Delta\xi_2 + (\Delta_2 k''_1 + \Delta_3 k''_2 + \Delta k''_0)\,\eta_2 + (\Delta_2 k'''_1 + \Delta_3 k'''_2 + \Delta k'''_0)\,\zeta_2]^2 + gh T_1 \tau\tau_1,$$

$ghT_1\tau\tau_1$ étant une autre réduite de ghT_1, telle que la substitution s'écrive

$$\eta = k_1''\eta_2 + k_1'''\zeta_2,$$
$$\zeta = k_2''\eta_2 + k_2'''\zeta_2.$$

Pour que ces deux systèmes réduits soient identiques, il faut et il suffit que

$$(gh)\,T_1\tau = (gh)\,T_1\tau\tau_1,$$
$$\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2 + \Delta k_0 = \Delta_2 k_1'' + \Delta_3 k_2'' + \Delta k_0'',$$
$$\Delta_2 k_1' + \Delta_3 k_2' + \Delta k_0' = \Delta_2 k_1''' + \Delta_3 k_2''' + \Delta k_0''';$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2 &\equiv \Delta_2 k_1'' + \Delta_3 k_2'' \\ \Delta_2 k_1' + \Delta_3 k_2' &\equiv \Delta_2 k_1''' + \Delta_3 k_2''' \end{aligned}\right\} \pmod{\Delta}.$$

Cherchons d'abord les substitutions qui reproduisent $(gh)\,T_1\tau$.

$(gh)\,T_1\tau$ est une forme binaire indéfinie; supposons qu'elle soit égale à un coefficient constant multiplié par une forme primitive

$$\psi = p\eta_1^2 + 2q\eta_1\zeta_1 + r\zeta_1^2.$$

Il est clair que la forme ψ, et par conséquent la forme $(gh)\,T_1\tau$, sera reproduite par la substitution

$$\eta_1 = (t - qu)\,\eta_2 - ru\zeta_2,$$
$$\zeta_1 = pu\eta_2 + (t + qu)\,\zeta_2,$$

où t et u sont des entiers satisfaisant à

$$t^2 - (q^2 - rp)\,u^2 = 1,$$

si la forme ψ est proprement primitive, et où $2t$ et $2u$ sont des entiers satisfaisant à

$$4t^2 - 4\,(q^2 - rp)\,u^2 = 4,$$

si la forme ψ est improprement primitive.

Si l'on applique cette substitution à

$$(\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2)\eta_1 + (\Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2)\zeta_1,$$

il vient

$$[(\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2)(t - qu) + (\Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2)pu]\eta_2$$
$$+ [(\Delta_2 k''_1 + \Delta_3 k''_2)(t + qu) - (\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2)ru]\zeta_2;$$

d'où

$$\left.\begin{array}{l}(\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2)(t - qu) + (\Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2)pu \equiv \Delta_2 k''_1 + \Delta_3 k''_2 \\ (\Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k''_2)(t + qu) - (\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2)ru \equiv \Delta_2 k'''_1 + \Delta_3 k'''_2\end{array}\right\} \pmod{\Delta}$$

ou, posant

$$\Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2 = v, \qquad \Delta_2 k'_1 + \Delta_3 k'_2 = w,$$

on doit avoir

$$\left.\begin{array}{l}vt + u(pw - qv) \equiv v \\ wt + u(qw - rv) \equiv w\end{array}\right\} \pmod{\Delta}.$$

Soit ρ le plus grand commun diviseur de v, w et Δ; soit σ celui de v et de w. Ces deux congruences pourront être remplacées par les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{v}{\sigma}(t - qu) + \frac{w}{\sigma}pu \equiv \frac{v}{\sigma} \\ \frac{v}{\sigma}ru + \frac{w}{\sigma}(t + qu) \equiv \frac{w}{\sigma}\end{array}\right\} \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Multiplions la première par ru, la seconde par $t - qu$ et ajoutons; multiplions de même la première par $t + qu$, la seconde par $-pu$, et ajoutons. En remarquant que

$$t^2 - (q^2 - rp)u^2 = 1,$$

nous aurons

$$\left.\begin{array}{l}\frac{v}{\sigma}ru + \frac{w}{\sigma}(t - qu) \equiv \frac{w}{\sigma} \\ \frac{v}{\sigma}(t + qu) - \frac{w}{\sigma}pu \equiv \frac{v}{\sigma}\end{array}\right\} \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right),$$

d'où

$$2u\frac{rv-qw}{\sigma} \equiv 2u\frac{qv-pw}{\sigma} \equiv 0 \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Soit θ le plus grand commun diviseur de

$$\frac{rv-qw}{\sigma}, \quad \frac{qv-pw}{\sigma} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta}{\rho}.$$

Ces deux congruences se réduiront à

$$2u \equiv 0 \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho\theta}\right).$$

Premier cas.

La forme $px^2 + 2qxy + ry^2$ est proprement primitive; $\frac{\Delta}{\rho\theta}$ est impair, u et t doivent être entiers. Dans ce cas les congruences se réduisent à

$$u \equiv 0 \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho\theta}\right),$$

d'où

$$u\frac{rv-qw}{\sigma} \equiv u\frac{qv-pw}{\sigma} \equiv 0 \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right),$$

$$\left.\begin{aligned} t\frac{w}{\sigma} &\equiv \frac{w}{\sigma} \\ t\frac{v}{\sigma} &\equiv \frac{v}{\sigma} \end{aligned}\right\} \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right)$$

ou

$$t \equiv 1 \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Deuxième cas.

La forme $px^2 + 2qxy + ry^2$ est proprement primitive; $\frac{\Delta}{\rho\theta}$ est pair. Dans ce cas, u et t doivent être entiers, et l'on doit avoir

$$u \equiv 0 \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{2\rho\theta}\right);$$

d'où

$$u\,\frac{r\nu - q\varpi}{\sigma} \equiv u\,\frac{q\nu - p\varpi}{\sigma} \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{2\rho}\right)$$

et

$$t \equiv 1 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{2\rho}\right).$$

De plus

$$\frac{2\rho}{\Delta}(t-1)\frac{\varpi}{\sigma} \quad \text{et} \quad \frac{2\rho\theta}{\Delta}\,u\,\frac{r\nu - q\varpi}{\sigma\theta}$$

et, d'autre part,

$$\frac{2\rho}{\Delta}(t-1)\frac{\nu}{\sigma} \quad \text{et} \quad \frac{2\rho\theta}{\Delta}\,u\,\frac{q\nu - p\varpi}{\sigma\theta}$$

doivent être de même parité.

Or $\frac{\nu}{\sigma}$ et $\frac{w}{\sigma}$ ne peuvent être pairs tous deux ; de même $\frac{r\nu - q\varpi}{\sigma\theta}$ et $\frac{q\nu - pw}{\sigma\theta}$ ne peuvent être pairs tous deux.

Cela posé, il peut se présenter deux cas :

1°
$$\frac{\varpi}{\sigma} \quad \text{et} \quad \frac{r\nu - q\varpi}{\sigma\vartheta}$$

et, d'autre part,

$$\frac{\nu}{\sigma} \quad \text{et} \quad \frac{q\nu - p\nu}{\sigma\theta}$$

sont de même parité, et alors les congruences se réduisent à

$$t - 1 \equiv u\theta \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{2\rho}\right), \qquad t - 1 \equiv u\theta \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{\rho}\right);$$

2° Ou bien les nombres

$$\frac{w}{\sigma} \quad \text{et} \quad \frac{r\nu - q\varpi}{\sigma\theta},$$

ou les nombres

$$\frac{\nu}{\sigma} \quad \text{et} \quad \frac{q\nu - p\nu}{\sigma\theta}$$

ne sont pas de même parité, et alors les congruences se réduisent à

$$t - 1 \equiv u\theta \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Troisième cas.

La forme $px^2 + 2qxy + ry^2$ est improprement primitive. Dans ce cas, $2u$ et $2t$ sont entiers, et l'on trouve immédiatement

$$2u\theta \equiv 2(t-1) \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{\rho}\right),$$

$$\theta \equiv 1 \quad (\operatorname{mod} 2), \qquad q^2 - rp \equiv 1 \quad (\operatorname{mod} 2).$$

Mais cela n'est pas suffisant, il faut encore que les parités de $2u$ et de $2t$ satisfassent à certaines conditions.

D'abord $2u$ et $2t$ doivent être de même parité; car

$$4t^2 - 4(q^2 - rp)u^2 = 4 \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} 2);$$

d'où

$$4t^2 \equiv 4u^2 \quad \text{et} \quad 2t \equiv 2u.$$

Deux cas à considérer :

1° Si $\frac{\Delta}{\rho}$ est pair, $2u$ et $2t$ doivent être pairs, à cause des congruences

$$2u\theta \equiv 2(t-1) \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{\rho}\right),$$

et ces congruences se réduisent à

$$u\theta \equiv t - 1 \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{2\rho}\right).$$

Envisageons maintenant les congruences

$$(\zeta) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{v}{\sigma}(t-1) + u\theta \frac{pw - qv}{\sigma\theta} \equiv 0 \\ \frac{w}{\sigma}(t-1) + u\theta \frac{qw - rv}{\sigma\theta} \equiv 0 \end{array} \right\} \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Puisque

$$p \equiv r \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} 2), \qquad q \equiv 1 \quad (\operatorname{mod} 2),$$

$$\frac{v}{\sigma} \equiv \frac{pw - qv}{\sigma\theta}, \qquad \frac{w}{\sigma} \equiv \frac{qw - rv}{\sigma\theta} \quad (\operatorname{mod} 2).$$

Posons donc

$$t - 1 = \frac{\Delta}{2\rho}\tau, \qquad u\theta = \frac{\Delta}{2\rho}\upsilon,$$

ces congruences se réduiront à

$$\frac{v}{\sigma}(\tau + \upsilon) \equiv \frac{w}{\sigma}(\tau + \upsilon) \equiv 0 \pmod{2}$$

ou, puisque $\frac{v}{\sigma}$ et $\frac{w}{\sigma}$ sont premiers entre eux,

$$\tau \equiv \upsilon \pmod{2}$$

ou

$$t - 1 \equiv u\theta \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

2° Si $\frac{\Delta}{\rho}$ est impair, $2t$ et $2u$ peuvent être pairs ou impairs, et par conséquent t et u peuvent être entiers ou fractionnaires.

Les congruences

$$2u\theta \equiv 2(t-1) \equiv 0 \quad \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right)$$

équivalent aux suivantes

$$\left.\begin{aligned} 2(t-1)\frac{v}{\sigma} + 2u\theta\frac{pw - qv}{\sigma\theta} &\equiv 0 \\ 2(t-1)\frac{w}{\sigma} + 2u\theta\frac{qw - rv}{\sigma\theta} &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right),$$

lesquelles équivalent aux congruences (ζ), pourvu que les nombres

$$(t-1)\frac{v}{\sigma} + u\theta\frac{pw - qv}{\sigma\theta},$$

$$(t-1)\frac{w}{\sigma} + u\theta\frac{qw - rv}{\sigma\theta}$$

soient entiers, ce qui exige que

$$2(t-1)\frac{v}{\sigma} + 2u\theta\frac{pw - qv}{\sigma\theta} \equiv 0,$$

$$2(t-1)\frac{v}{\sigma} + 2u\theta\frac{qw - rv}{\sigma\theta} \equiv 0 \pmod{2},$$

ou

$$\frac{\nu}{\sigma}[2(t-1)+2u\theta] \equiv \frac{\varpi}{\sigma}[2(t-1)+2u\theta] \equiv 0 \pmod 2$$

ou

$$2(t-1) \equiv 2u\theta \pmod 2.$$

Résumons-nous. Le problème des transformations semblables se ramène au calcul de nombres t et u satisfaisant à certaines conditions. Cinq cas peuvent se présenter, puisque le deuxième et le troisième cas se subdivisent. Soit

$$q^2 - rp = \Omega.$$

Premier cas.

t et u sont entiers :

$$t^2 - \Omega u^2 = 1, \qquad u \equiv 0 \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho\theta}\right), \qquad t \equiv 1 \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Deuxième cas.

t et u sont entiers :

$$t^2 - \Omega u^2 = 1, \qquad t-1 \equiv u\theta \equiv 0 \left(\bmod \frac{\Delta}{2\rho}\right),$$

$$t-1 \equiv u\theta \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Troisième cas.

t et u sont entiers :

$$t^2 - \Omega u^2 = 1, \qquad t-1 \equiv u\theta \equiv 0 \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Quatrième cas.

t et u sont entiers :

$$t^2 - \Omega u^2 = 1, \qquad t-1 \equiv u\theta \equiv 0 \left(\bmod \frac{\Delta}{2\rho}\right),$$

$$t-1 \equiv u\theta \left(\bmod \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Cinquième cas.

$2t$ et $2u$ sont entiers et de même parité :

$$4t^2 - 4\Omega u^2 = 4, \qquad 2(t-1) \equiv 2u\theta \equiv 0 \quad \left(\text{mod} \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Nous allons maintenant discuter ces conditions.

Considérons les nombres complexes de la forme

$$a + b\sqrt{\Omega}.$$

On sait que les nombres entiers de cette forme, qui satisfont à la condition

$$a^2 - b^2\Omega = 1,$$

sont les puissances d'un certain nombre entier complexe

$$a_1 + b_1\sqrt{\Omega}.$$

Dans le cas particulier où Ω est impair, il peut arriver aussi qu'un nombre complexe fractionnaire

$$\frac{c + d\sqrt{\Omega}}{2},$$

où c et d sont entiers, mais impairs, satisfasse à la condition

$$c^2 + d^2\Omega = 4.$$

Dans ce cas, tous les nombres complexes entiers de la forme $a + b\sqrt{\omega}$, ou fractionnaires de la forme $\frac{c + d\sqrt{\Omega}}{2}$, sont les puissances d'un même nombre fractionnaire

$$\frac{c_1 + d_1\sqrt{\Omega}}{2}.$$

Nous retrouvons, en passant, une remarque déjà faite autrefois par Eisentein. Je dis qu'en supposant que ce nombre $\frac{c_1 + d_1\sqrt{\Omega}}{2}$ existe, il est la

racine cubique de $a_1 + b_1\sqrt{\Omega}$. En effet, $a_1 + b_1\sqrt{\Omega}$ est une puissance de $\frac{c_1 + d_1\sqrt{\Omega}}{2}$, et c'est la plus petite de ses puissances qui soit un entier complexe.

Or, puisque $\frac{r_1 + d_1\sqrt{\Omega}}{2}$ est fractionnaire et que

$$c_1^2 - d_1^2\Omega = 4, \qquad \Omega \equiv 1 \pmod 2,$$

on aura

$$c_1 \equiv d_1 \equiv 1 \pmod 2.$$

De plus

$$\left(\frac{c_1 + d_1\sqrt{\Omega}}{2}\right)^2 = \frac{c_1^2 + d_1^2\Omega}{4} + \frac{c_1 d_1}{2}\sqrt{\Omega};$$

or

$$c_1 d_1 \equiv 1 \pmod 2;$$

donc la deuxième puissance est fractionnaire.

Au contraire,

$$\left(\frac{c_1 + d_1\sqrt{\Omega}}{2}\right)^3 = \frac{c_1^3 + 3c_1 d_1^2\Omega}{8} + \frac{3c_1^2 d_1 + d_1^3\Omega}{8}\sqrt{\Omega};$$

cette valeur se simplifie à cause de

$$c_1^2 = 4 + d_1^2\Omega,$$

ce qui donne

$$\frac{c_1(1 + d_1^2\Omega)}{2} + \frac{d_1(3 + d_1^2\Omega)}{2}\sqrt{\Omega}.$$

Or il est clair que

$$1 + d_1^2\Omega \equiv 3 + d_1^2\Omega \equiv 0 \pmod 2;$$

donc la troisième puissance est entière. Donc elle est égale à $a_1 + b_1\sqrt{\Omega}$.

C. Q. F. D.

Cette remarque permettra toujours de reconnaître si le nombre $\frac{c_1 + d_1\sqrt{\Omega}}{2}$ existe.

En résumé, les nombres t et u seront tels que le nombre complexe

$$t + u\sqrt{\Omega}$$

soit une puissance suivant les cas de

$$a_1 + b_1\sqrt{\Omega} \quad \text{ou de} \quad \frac{c_1 + d_1\sqrt{\Omega}}{2}.$$

Nous allons voir comment la théorie des congruences complexes permet de trouver toutes celles de ces puissances qui remplissent les autres conditions auxquelles sont assujettis les nombres t et u.

DES CONGRUENCES COMPLEXES.

Nous dirons que deux nombres complexes $a + b\sqrt{\Omega}$ et $c + d\sqrt{\Omega}$ sont congrus, par rapport au double module $\alpha + \beta\sqrt{\Omega}$ et $\gamma + \delta\sqrt{\Omega}$, et nous écrirons

$$a + b\sqrt{\Omega} \equiv c + d\sqrt{\Omega} \quad [\mathrm{mod}(\alpha + \beta\sqrt{\Omega}, \gamma + \delta\sqrt{\Omega})]$$

quand on aura

$$a = c + \alpha m + \gamma n,$$
$$b = d + \beta m + \delta n,$$

m et n étant des entiers.

Si l'on représente le nombre complexe $a + b\sqrt{\Omega}$ par un point dont les coordonnées sont a et b, si l'on divise le plan en parallélogrammes ayant pour sommets

$$\alpha m + \gamma n, \quad \beta m + \delta n,$$

à des nombres congrus correspondront des points correspondants de ce réseau parallélogrammatique.

Représentons ce réseau par la notation

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix},$$

de manière à pouvoir écrire

$$a + b\sqrt{\Omega} \equiv c + d\sqrt{\Omega} \quad \left(\bmod \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}\right),$$

ce réseau peut être remplacé par un réseau équivalent, et, parmi les réseaux équivalents, il y en a toujours un plus simple que les autres et qui est de la forme

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & 0 \end{vmatrix} \quad (0 < \alpha < \gamma)$$

[*voir* mon Mémoire *Sur un mode nouveau de représentation des formes quadratiques définies ou indéfinies* (XLVIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*)].

Par rapport à un réseau quelconque, les nombres entiers complexes se répartissent en un nombre fini de classes.

Deux congruences complexes peuvent toujours être additionnées si elles ont lieu par rapport au même réseau.

Si une congruence complexe a lieu par rapport à deux réseaux différents, elle a lieu par rapport à leur plus petit commun multiple.

Telles sont les ressemblances des congruences complexes et des congruences ordinaires; voici une différence importante : une congruence complexe ne pourra pas toujours être multipliée par un nombre entier complexe. Il faut, pour cela, que le réseau qui sert de module soit un nombre complexe idéal.

De même, pour que l'on puisse diviser une congruence complexe par un nombre entier complexe, il faut et il suffit que le module soit un nombre complexe idéal et soit premier avec le nombre entier complexe par lequel on veut diviser la congruence.

Pour toutes ces propositions, je renvoie au Mémoire cité plus haut.

Donc, en résumé, si le module est un nombre complexe idéal, le calcul des congruences complexes est le même que celui des congruences ordinaires.

Rappelons enfin les conditions pour qu'un réseau

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & 0 \end{vmatrix}$$

soit un nombre complexe idéal ; ces conditions sont

$$\alpha \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{\beta}, \qquad \frac{\alpha^2}{\beta^2} \equiv \Omega \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\gamma}{\beta}\right).$$

Une proposition importante :

Puisque le calcul des congruences complexes ayant pour module un nombre complexe idéal est le même que celui des congruences ordinaires, les résidus des puissances d'un nombre entier complexe (par rapport à un nombre complexe idéal premier avec lui) se reproduisent périodiquement.

CALCUL DE t ET DE u.

Nous pouvons maintenant calculer t et u ; nous savons que

$$t + u\sqrt{\Omega} = \left(a_1 + b_1\sqrt{\Omega}\right)^m \qquad \text{ou} \qquad t + u\sqrt{\Omega} = \left(c_1 + d_1\sqrt{\Omega}\right)^m,$$

m étant un entier, et cet entier va être déterminé par une congruence complexe. Examinons successivement les cinq cas qui peuvent se présenter et que nous avons énumérés plus haut :

Premier et troisième cas.

On a

$$t - 1 \equiv u\theta \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

On peut donc écrire la congruence complexe

$$t + u\sqrt{\Omega} \equiv 1 \quad \left(\operatorname{mod} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right).$$

Le module de cette congruence est un nombre complexe idéal ; car θ di-

vise Ω, et, si $a_1 + b_1\sqrt{\Omega}$ est le plus petit nombre entier complexe dont la norme soit l'unité, on aura

$$t + u\sqrt{\Omega} = (a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^m;$$

d'où la congruence

$$(a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^m \equiv 1.$$

Si l'on fait varier m par valeurs entières, on verra les résidus de $(a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^m$ se reproduire périodiquement ; si k est le plus petit nombre, tel que

$$(a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^k \equiv 1,$$

la condition nécessaire et suffisante pour que

$$(a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^m \equiv 1$$

sera

$$m \equiv 0 \pmod{k}.$$

De plus, on verrait, comme pour les congruences ordinaires, que k est un diviseur du nombre des résidus premiers avec le nombre idéal

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}.$$

De même on sait que, si a est premier avec b ; si k est le plus petit nombre, tel que

$$a^k \equiv 1 \pmod{b},$$

k est un diviseur du nombre des résidus (pris par rapport à b) et qui sont premiers avec b. Nous avons ici un résultat analogue qui se démontrerait identiquement de la même façon.

Deuxième et quatrième cas.

On a

$$t - 1 \equiv u\theta \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{2\rho}\right), \qquad t - 1 \equiv u\theta \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{\rho}\right),$$

ce qui équivaut à la congruence complexe

$$t + u\sqrt{\Omega} \equiv 1 \quad \left(\bmod \begin{vmatrix} \frac{\Delta}{2\rho} & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right).$$

Le module est-il un nombre complexe idéal?

Les conditions énoncées plus haut se réduisent ici à

$$\theta^2 \equiv \Omega \quad (\bmod 2\theta)$$

ou

$$\theta \equiv \frac{\Omega}{\theta} \quad (\bmod 2).$$

Dans le quatrième cas, la forme $px^2 + 2qxy + ry^2$ est improprement primitive : son discriminant Ω est donc impair ; donc θ et $\frac{\Omega}{\theta}$ sont tous deux impairs, c'est-à-dire que la condition est remplie.

Résumons les hypothèses relatives au deuxième cas :

La forme $px^2 + 2qxy + ry^2$ est proprement primitive ;

$\frac{\Delta}{\rho\theta}$ est pair ;

$\frac{w}{\sigma}$ et $\frac{rv - qw}{\sigma\theta}$ sont de même parité ;

$\frac{v}{\sigma}$ et $\frac{qv - pw}{\sigma\theta}$ sont de même parité.

On peut faire sur les parités de p, q, r les hypothèses suivantes :

$$p \equiv q \equiv r \equiv 1 \quad (\bmod 2),$$
$$p \equiv r \equiv 1, \qquad q \equiv 0 \quad (\bmod 2),$$
$$p \equiv q \equiv 1, \qquad r \equiv 0 \quad (\bmod 2),$$
$$q \equiv r \equiv 1, \qquad p \equiv 0 \quad (\bmod 2),$$
$$p \equiv 1, \qquad q \equiv r \equiv 0 \quad (\bmod 2),$$
$$r \equiv 1, \qquad q \equiv p \equiv 0 \quad (\bmod 2).$$

Dans les hypothèses 2, 3, 4, on a

$$\Omega \equiv 1 \quad (\bmod 2);$$

d'où

$$1 \equiv \theta \equiv \frac{\Omega}{\theta} \pmod 2.$$

Dans l'hypothèse 1, on peut supposer

$$\frac{w}{\sigma} \equiv 1, \qquad \frac{v}{\sigma} \equiv 0 \pmod 2;$$

mais alors

$$\frac{qv - pw}{\sigma} \equiv 1 \pmod 2,$$

et, par conséquent, $\frac{v}{\sigma}$ et $\frac{qv-pw}{\sigma\theta}$ ne seraient pas de même parité.

Cette hypothèse doit donc être rejetée, ainsi que

$$\frac{w}{\sigma} \equiv 1, \quad \frac{v}{\sigma} \equiv 0 \pmod 2.$$

On doit donc supposer

$$\frac{w}{\sigma} \equiv \frac{v}{\sigma} \equiv 1 \pmod 2;$$

d'où

$$\frac{rv - qw}{\sigma} \equiv \frac{qv - pw}{\sigma} \equiv 0 \pmod 2;$$

d'où, puisque $\frac{rv - qw}{\sigma} \equiv 1 \pmod 2$,

$$\theta \equiv 0 \pmod 2.$$

Dans l'hypothèse 5, on a

$$\frac{qv - pw}{\sigma} \equiv \frac{w}{\sigma} \pmod 2$$

et

$$\frac{rv - qw}{\sigma} \equiv 0 \pmod 2.$$

On ne peut donc supposer

$$\frac{w}{\sigma} \equiv 1, \qquad \frac{v}{\sigma} \equiv 0 \pmod 2.$$

Soit

$$\frac{v}{\sigma} \equiv 1, \qquad \frac{w}{\sigma} \equiv 0 \pmod 2.$$

On aura

$$\frac{qv - pw}{\sigma} \equiv 0, \qquad \frac{qv - pw}{\sigma\vartheta} \equiv 1 \pmod 2,$$

d'où

$$\theta \equiv 0 \pmod 2.$$

Soit maintenant

$$\frac{v}{\sigma} \equiv \frac{w}{\sigma} \equiv 1 \pmod 2.$$

On aura

$$\frac{rv - qw}{\sigma} \equiv 0, \qquad \frac{qv - pw}{\sigma} \equiv 1 \pmod 2.$$

Cette hypothèse doit donc être rejetée.

D'ailleurs, il est clair que l'hypothèse va se traiter comme l'hypothèse 5.

D'où il résulte que deux cas peuvent se présenter :

Première hypothèse :

$$\theta \equiv \frac{\Omega}{\theta} \pmod 2;$$

Seconde hypothèse :

$$\theta \equiv 0, \qquad \frac{\Omega}{\theta} \equiv 1 \pmod 2.$$

Dans la première hypothèse, le module de la congruence complexe étant un nombre idéal, tout se passera comme dans le premier et le troisième cas.

Dans la seconde hypothèse, il s'agit de résoudre une congruence complexe

$$(a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^m = t + u\sqrt{\Omega} \equiv 1 \mod \begin{vmatrix} \frac{\Delta}{2\rho} & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\vartheta} & 0 \end{vmatrix},$$

dont le module n'est pas un nombre idéal.

Soit

$$t + u\sqrt{\Omega} \equiv 1, \qquad t' + u'\sqrt{\Omega} \equiv 1.$$

Quelle est la condition pour que

$$(t+u\sqrt{\Omega})(t'+u'\sqrt{\Omega}) \equiv 1 ?$$

On aura

$$u\theta \equiv u'\theta \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{2\rho}\right),$$

$$t-1 \equiv u\theta, \qquad t'-1 \equiv u'\theta \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Soient

$$\frac{\Delta}{2\rho\theta} = \alpha, \qquad u = \alpha\lambda, \qquad u' = \alpha\lambda', \qquad \Omega = \omega\theta.$$

Pour que

$$(t+u\sqrt{\Omega})(t'+u'\sqrt{\Omega}) \equiv 1,$$

il faut et il suffit que

$$t'u\theta + u't\theta \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{2\rho}\right)$$

et

$$A = tt' + uu'\Omega - t'u\theta - tu'\theta - 1 \equiv 0 \quad \left[\operatorname{mod}\left(\frac{\Delta}{\rho} = 2\alpha\theta\right)\right].$$

Or

$$A = t(t'-1) + (t-1) + \alpha^2\lambda\lambda'\omega\theta - \alpha\theta(t'\lambda + t\lambda')$$

ou

$$\left.\begin{aligned} A &\equiv \alpha\theta\lambda' t + \alpha\theta\lambda + \alpha^2\lambda\lambda'\omega\theta - \alpha\theta(t'\lambda + t\lambda'), \\ A &\equiv \alpha\theta\lambda(1 - t' + \alpha\lambda'\omega\theta) \equiv \alpha^2\theta\lambda\lambda'(\omega - \theta) \end{aligned}\right\} \quad (\operatorname{mod} 2\alpha\theta),$$

de sorte que la condition cherchée

$$A \equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{\Delta}{\rho}\right)$$

se réduit à

$$\alpha\lambda\lambda'(\omega - \theta) \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} 2).$$

Or, par hypothèse,

$$\omega - \theta \equiv 1 \quad (\operatorname{mod} 2).$$

Il faut donc et il suffit que l'un des trois nombres α, λ, λ' soit pair. Or, si

λ est pair, on aura

$$t+u\sqrt{\Omega}\equiv 1 \quad \left(\operatorname{mod}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right).$$

En résumé, si deux nombres complexes sont congrus à 1 par rapport au module

$$\begin{vmatrix} \frac{\Delta}{2\rho} & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}$$

[où

$$\frac{\Omega}{\theta}\equiv\theta+1 \quad (\operatorname{mod} 2),$$

de telle façon que le module ne soit pas un nombre idéal], pour que leur produit soit également congru à 1, il faut et il suffit que $\frac{\Delta}{2\rho\theta}$ soit pair ou que l'un des deux nombres donnés soit congru à 1 par rapport au module

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}.$$

Cela posé, nous pourrons, dans l'hypothèse qui nous occupe, distinguer deux cas :

1° $\frac{\Delta}{2\rho\theta}$ est pair.

Alors le produit de deux nombres congrus à 1 est toujours congru à 1.

Si donc k est le plus petit des nombres m qui satisfassent à la congruence

$$(a_1+b_1\sqrt{\Omega})^m\equiv 1 \quad \left(\operatorname{mod}\begin{vmatrix} \frac{\Delta}{2\rho} & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right),$$

tous les autres sont des multiples de k, c'est-à-dire que tout se passe comme si le module était un nombre complexe idéal.

Nous devons toutefois faire une distinction importante. Dans le cas où le module était un nombre complexe idéal, les nombres

$$(a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^m \quad \text{et} \quad (a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^{m+k}$$

étaient congrus entre eux quel que soit m.

Ici cela n'aura plus lieu en général, à moins que

$$(a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^k \equiv 1 \quad \left(\text{mod} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right);$$

mais on aura toujours

$$(a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^m \equiv (a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^{m+2k} \quad \left(\text{mod} \begin{vmatrix} \frac{\Delta}{2\rho} & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right),$$

de sorte que la période sera, en général, non pas k, mais $2k$. De plus, k est un diviseur du nombre des résidus pris par rapport au nombre idéal

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}$$

et premiers par rapport à ce nombre idéal.

2° $\dfrac{\Delta}{2\rho\theta}$ est impair.

Soit

$$(25) \qquad (a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^m \equiv 1 \quad \left(\text{mod} \begin{vmatrix} \frac{\Delta}{2\rho} & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right)$$

une solution quelconque de la congruence. Cette solution nous fournira

une substitution semblable du système f, φ. Le carré de cette substitution sera également une substitution semblable, de sorte qu'on devra avoir

$$(a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^{2m} \equiv 1 \quad \left(\text{mod} \begin{vmatrix} \frac{\Delta}{2\rho} & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right).$$

Or, d'après ce qu'on a vu plus haut, cela ne peut avoir lieu que si l'on a

$$(26) \qquad (a_1 + b_1\sqrt{\Omega})^{m} \equiv 1 \quad \left(\text{mod} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{\rho} \\ \frac{\Delta}{\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right).$$

On peut donc remplacer la congruence (25) par la congruence (26) dont le module est un nombre idéal; on est donc ainsi ramené aux cas déjà examinés.

Cinquième cas.

$2t$ et $2u$ sont entiers et de même parité.

$$4t^2 - 4u^2\Omega = 4, \qquad 2(t-1) \equiv 2u\theta \quad \left(\text{mod}\,\frac{\Delta}{\rho}\right).$$

Ici le nombre $t + u\sqrt{\Omega}$ peut ne plus être entier complexe; mais les nombres de la forme $a + b\sqrt{\Omega}$, tels que $2a$ et $2b$ soient entiers et de même parité, jouissent de propriétés qui les rapprochent des nombres entiers. Nous les appellerons, pour cette raison, *nombres intègres*.

La somme ou le produit de deux nombres intègres est un nombre intègre.

Cela posé, on devra avoir

$$t + u\sqrt{\Omega} \equiv 1 \quad \left(\text{mod} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{2\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right),$$

cette congruence pouvant être résolue, soit en nombres entiers, soit en nombres intègres.

Je dis qu'une congruence prise en nombres intègres par rapport au module

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{2\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}$$

peut être multipliée par un nombre intègre quelconque. Il suffit, en effet, de faire voir qu'on peut la multiplier par

$$\sqrt{\Omega} \quad \text{et} \quad \frac{1+\sqrt{\Omega}}{2}.$$

Soit, en effet,

$$a + b\sqrt{\Omega} \equiv 0;$$

on aura

$$a = \alpha\frac{\Delta}{2\rho}, \qquad b = \beta\frac{\Delta}{2\rho\theta},$$

α et β étant entiers pendant que $\alpha\frac{\Delta}{\rho}$ et $\beta\frac{\Delta}{\rho\theta}$ sont de même parité.

En multipliant par $\sqrt{\Omega}$, il vient

$$\beta\frac{\Delta}{2\rho\theta}\Omega + \alpha\frac{\Delta}{2\rho}\sqrt{\Omega} \equiv 0.$$

Je dis que cette congruence est vérifiée ; en effet,

$$\beta\frac{\Delta}{2\rho\theta}\Omega \equiv 0 \quad \left(\text{mod}\,\frac{\Delta}{2\rho}\right),$$

puisque β et $\frac{\Omega}{\theta}$ sont entiers ; de même

$$\alpha\frac{\Delta}{2\rho} \equiv 0 \quad \left(\text{mod}\,\frac{\Delta}{2\rho\theta}\right),$$

puisque α et θ sont entiers.

En multipliant par $\frac{1+\sqrt{\Omega}}{2}$, il vient

$$\frac{\Delta}{2\rho}\left(\frac{\beta\Omega}{2\theta} + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\Delta}{2\rho\theta}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha\theta}{2}\right)\sqrt{\Omega} \equiv 0.$$

Pour que cette congruence soit vérifiée, il faut et il suffit que

$$\beta \frac{\Omega}{\theta} + \alpha \equiv \beta + \alpha\theta \equiv 0 \pmod 2;$$

or, puisque

$$\frac{\Omega}{\theta} \equiv \theta \equiv 1 \pmod 2,$$

il faut et il suffit que

$$\beta + \alpha \equiv 0 \pmod 2.$$

Or, puisque, dans le cinquième cas, $\frac{\Delta}{\rho}$ est impair, et que l'on doit supposer

$$\beta \frac{\Delta}{\rho\theta} \equiv \alpha \frac{\Delta}{\rho} \pmod 2,$$

cette condition sera toujours remplie.

C'est dire que toute congruence en nombres intègres, prise par rapport au module

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{2\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix},$$

peut être multipliée par un nombre intègre quelconque, c'est-à-dire qu'elle jouit des mêmes propriétés que les congruences complexes en nombres entiers prises par rapport à un nombre idéal.

Cela posé, la congruence qu'il s'agit de résoudre pour avoir t et u s'écrit

$$t + u\sqrt{\Omega} = \left(\frac{c_1 + d_1\sqrt{\Omega}}{2}\right)^m \equiv 1 \quad \left(\bmod \begin{vmatrix} 0 & \frac{\Delta}{2\rho} \\ \frac{\Delta}{2\rho\theta} & 0 \end{vmatrix}\right).$$

La discussion de cette congruence est absolument la même que celle que nous avons faite dans le premier et dans le troisième cas.

Si k est le plus petit nombre qui, substitué à m, satisfasse à cette congruence, les autres seront ses multiples.

De plus, on aura, quel que soit m,

$$\left(\frac{c_1 + d_1\sqrt{\Omega}}{2}\right)^{m+k} \equiv \left(\frac{c_1 + d_1\sqrt{\Omega}}{3}\right)^{m}.$$

Une fois m connu, on aura sans peine t et u, et la connaissance de t et de u permettra d'écrire immédiatement les substitutions semblables du système f, φ.

Remarque. — Au commencement de ce travail, j'avais défini de la façon suivante les systèmes réduits formés d'une forme linéaire et d'une forme quadratique :

« On dit que le système f, φ est réduit, si l'on peut écrire

$$\pm\varphi = \alpha f^2 + gh,$$

g et h étant linéaires et α positif, et si l'on peut choisir λ de telle sorte que la forme définie

$$\alpha f^2 + \left(\frac{\lambda g + \frac{1}{\lambda} h}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda g - \frac{1}{\lambda} h}{2}\right)^2$$

soit réduite. »

On a vu que, si α est suffisamment petit, cette définition revient à la suivante :

On dit que le système f, φ est réduit quand gh est une forme binaire réduite en y et en z et quand les coefficients de y et de z dans f sont plus petits en valeur absolue que la moitié du coefficient de x.

De plus, on a vu qu'une transformation très simple permet de rendre α aussi petit que l'on veut. Il est donc plus logique et plus simple de s'en tenir, quel que soit α, à cette seconde définition ; c'est ce que nous ferons toujours.

Mais ce n'est pas tout. Dans cette seconde définition, j'ai dit que gh doit être une forme binaire réduite et j'ai entendu par là une forme telle que

$$\left(\frac{\lambda g + \frac{1}{\lambda} h}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda g - \frac{1}{\lambda} h}{2}\right)^2$$

soit réduite.

Mais il y a une infinité de manières de définir les formes binaires réduites indéfinies, et à chacune d'elles va correspondre une façon nouvelle de définir les systèmes réduits tels que f, φ.

Cette définition nouvelle conviendra aussi bien que celles qui précèdent à l'objet que nous nous proposons, c'est-à-dire à la recherche des conditions d'équivalence des systèmes et de leurs substitutions semblables. On pourra donc choisir dans chaque cas particulier celle qui conduira aux calculs les plus rapides.

Par exemple, on pourra appeler *forme réduite* toute forme binaire indéfinie dont les coefficients extrêmes sont de signe contraire. On peut alors, par un calcul très simple, déduire d'une forme réduite une forme réduite équivalente et contiguë, de sorte qu'on arrive très rapidement à écrire toutes les réduites d'une forme donnée.

C'est de cette dernière définition que nous ferons usage dans l'exemple numérique qui va suivre.

Exemple numérique. — Soit

$$f = x + y + z,$$
$$\varphi = x^2 + 4y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

On a

$$l = m = n = 1;$$

d'où les trois équations

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1, \\ a + 4b + 5c &= 1, \\ a - 5b - 13c &= 1; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$a = 1, \qquad b = c = 0$$

et, par conséquent,

$$\delta_1 = 1,$$
$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 1, & \mu_1 = 0, & \nu_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, & \mu_2 = 1, & \nu_2 = 0, \\ \lambda_3 = 0, & \mu_3 = 0, & \nu_3 = 1, \end{array}$$
$$\Delta = \Delta_2 = \Delta_3 = 1.$$

On a, d'autre part,

$$\varphi(a, b, c) = 1;$$

d'où

$$-gh = \varphi - f^2 = 3y^2 - 2z^2.$$

Le problème est donc ramené à la réduction successive de la forme

$$3y^2 - 2z^2;$$

$3y^2 - 2z^2$ est elle-même une réduite, et l'on trouve immédiatement que la série des réduites de cette forme s'écrit comme il suit :

$$\begin{array}{c} 3y^2 - 2z^2, \\ y^2 - 4yz - 2z^2, \\ y^2 - 2yz - 5z^2, \\ y^2 - 6z^2, \\ y^2 + 2yz - 5z^2, \\ y^2 + 4yz - 2z^2, \\ 3y^2 - 2z^2, \end{array}$$

et se reproduisent ensuite périodiquement. Dans ce tableau, chaque réduite se déduit de la précédente par l'une des substitutions

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Elles se déduisent de $3y^2 - 2z^2$ par les substitutions

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

Soit

$$\begin{vmatrix} k_1 & k'_1 \\ k_2 & k'_2 \end{vmatrix}$$

l'une de ces substitutions.

La substitution correspondante

$$\begin{vmatrix} 1 & k_0 & k'_0 \\ 0 & k_1 & k'_1 \\ 0 & k_2 & k'_2 \end{vmatrix},$$

qui réduira le système f, φ, devra satisfaire à la condition

$$-\frac{\Delta}{2} < \Delta_2 k_1 + \Delta_3 k_2 + \Delta k_0 < \frac{\Delta}{2}$$

ou

$$-\tfrac{1}{2} < k_1 + k_2 + k_0 < \tfrac{1}{2},$$

d'où

$$k_0 = -(k_1 + k_2).$$

De même

$$k'_0 = -(k'_1 + k'_2),$$

de sorte que la suite des substitutions qui réduisent f, φ est

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -11 & -9 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix};$$

d'où, pour les systèmes réduits de f, φ, le tableau suivant :

$$\begin{array}{ll} x, & x^2 - 3y^2 + 2z^2, \\ x, & x^2 - y^2 + 4yz + 2z^2, \\ x, & x^2 - y^2 + 2yz + 5z^2, \\ x, & x^2 - y^2 + 6z^2, \\ x, & x^2 - y^2 - 2yz + 5z^2, \\ x, & x^2 - y^2 - 4yz + 2z^2, \\ x, & x^2 - 3y^2 + 2z^2. \end{array}$$

De plus, si

$$T = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad T_1 = \begin{vmatrix} 1 & -11 & -9 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix},$$

les substitutions semblables du système f, φ seront les puissances de

$$T_1 T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -10 & -8 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

On aurait pu arriver au même résultat directement.

En effet, ici

$$\Omega = 6,$$

et l'équation

$$t^2 - \Omega u^2 = 1$$

admet, pour sa solution la plus simple,

$$t = 5, \qquad u = 2,$$

ce qui conduit, pour la substitution semblable la plus simple de gh, à

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix};$$

d'un autre côté, les congruences auxquelles sont assujettis les nombres t et u ayant pour module $\frac{\Delta}{\rho}$, qui est ici l'unité, sont toujours satisfaites. Donc les nombres

$$t = 5, \qquad u = 2$$

sont bien ceux qui correspondent à la substitution semblable la plus simple du système f, φ; c'est dire que cette substitution est de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & k_0 & k'_0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix},$$

et, comme elle doit reproduire

$$x + y + z,$$

elle aura pour coefficients

$$k_0 = -10, \qquad k'_0 = -8.$$

C. Q. F. D.

Deuxième exemple. — Soit à trouver les substitutions semblables du système

$$14x + y + 2z,$$
$$y^2 - 6z^2.$$

On a

$$\Omega = 6,$$

et les substitutions semblables devront être de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & k_0 & k'_0 \\ 0 & t & 6u \\ 0 & u & t \end{vmatrix},$$

où

$$(t + u\sqrt{6}) = (5 + 2\sqrt{6})^m;$$

puisque

$$t = 5,$$

$u = 2$ est la solution la plus simple de

$$t^2 - 6u^2 = 1.$$

On est donc conduit aux congruences suivantes

$$\begin{aligned} t + 2u &\equiv 1 \pmod{14}. \\ 6u + 2t &\equiv 2. \end{aligned}$$

Ici

$$v = 1, \qquad w = 2,$$

$$\sigma = 1, \qquad \rho = 1, \qquad \frac{\Delta}{\rho} = 14,$$

$$\frac{rv - qw}{\sigma} = -6, \qquad \frac{qv - pw}{\sigma} = -2, \qquad \theta = 2,$$

$$\frac{\Delta}{\rho\theta} = 7 \equiv 1 \pmod{2}.$$

De plus, la forme est proprement primitive, de sorte qu'on est dans le premier cas et que les congruences se réduisent à

$$\begin{aligned} t &\equiv 1 \pmod{14}, \\ u &\equiv 0 \pmod{7}. \end{aligned}$$

On peut d'ailleurs retrouver ces congruences directement.

Reprenons

$$\left.\begin{aligned} t + 2u &\equiv 1 \\ 6u + 2t &\equiv 2 \end{aligned}\right\} \pmod{14}.$$

Multiplions la première par $-6u$, la seconde par t et ajoutons; il vient

$$2(t^2 - 6u^2) \equiv 2t - 6u \pmod{14}.$$

Multiplions de même la première par t, la seconde par $-u$; il vient

$$t^2 - 6u^2 \equiv t - 2u \pmod{14}.$$

A cause de la relation

$$t^2 - 6u^2 = 1,$$

ces congruences se réduisent à

$$\left.\begin{aligned} 2t - 6u &\equiv 2 \\ t - 2u &\equiv 1 \end{aligned}\right\} \pmod{14},$$

qui, jointes aux premières, donnent

$$12u \equiv 4u \equiv 0 \pmod{14}$$

ou

$$\begin{aligned} u &\equiv 0 \pmod{7}, \\ 2u &\equiv 0 \pmod{14}, \\ t &\equiv 1 \pmod{14}. \end{aligned}$$

La recherche de t et de u se ramène donc à la résolution de la congruence complexe

$$t + u\sqrt{6} = (5 + 2\sqrt{6})^m \equiv 1, \qquad \text{mod} \begin{vmatrix} 0 & 14 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Or on trouve que, par rapport à ce module qui est un nombre complexe idéal,

$$\begin{aligned} (5 + 2\sqrt{6})^2 &\equiv 7 + 6\sqrt{6}, \\ (5 + 2\sqrt{6})^3 &\equiv 9 + 2\sqrt{6}, \\ (5 + 2\sqrt{6})^4 &\equiv -1, \\ (5 + 2\sqrt{6})^5 &\equiv -5 - 2\sqrt{6}, \\ (5 + 2\sqrt{6})^6 &\equiv -7 - 6\sqrt{6}, \\ (5 + 2\sqrt{6})^7 &\equiv -9 - 2\sqrt{6}, \\ (5 + 2\sqrt{6})^8 &\equiv 1, \end{aligned}$$

et que par conséquent on aura, si m et μ sont des entiers quelconques,

$$(5 + 2\sqrt{6})^{m+8\mu} \equiv (5 + 2\sqrt{6})^m.$$

Les valeurs de $t + u\sqrt{6}$ nous est donc donnée par

$$(5 + 2\sqrt{6})^8 = 46099201 + 18819920\sqrt{6}.$$

La substitution semblable la plus simple du système est donc de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & k_0 & k'_0 \\ 0 & 46099201 & 112919520 \\ 0 & 18819920 & 46099201 \end{vmatrix},$$

et, comme elle doit reproduire

$$14x + y + 2z,$$

on aura

$$1 = 14k_0 + 83739041,$$
$$2 = 14k'_0 + 205117922;$$

d'où

$$k_0 = 5981360,$$
$$k'_0 = 14651280.$$

Donc, les substitutions semblables du système

$$14x + y + 2z, \qquad y^2 - 6z^2$$

sont les puissances de

$$\begin{vmatrix} 1 & 5918360 & 14651280 \\ 0 & 46099201 & 112919520 \\ 0 & 18819920 & 46099201 \end{vmatrix}.$$

(Extrait du *Journal de l'École Polytechnique*, LVIe Cahier; 1886.)

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55

SUR LES

FONCTIONS A ESPACES LACUNAIRES

PAR

H. POINCARÉ.

EXTRAIT DES „ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ. TOMUS XIII."

HELSINGFORS.
IMPRIMERIE DE LA SOCIÉTÉ FINLANDAISE DE LITTÉRATURE.
1881.

Sur les fonctions à espaces lacunaires

par

H. Poincaré.

M. Weierstrass dans un mémoire intitulé *Zur Funktionenlehre* et inséré dans les *Berliner Monatsberichte* a appelé l'attention des géomètres sur certaines fonctions présentant des singularités spéciales. Au lieu de présenter un nombre fini ou infini de points singuliers essentiels *isolés* elles offrent des lignes singulières essentielles ou même des *espaces lacunaires* à l'intérieur desquels elles cessent d'exister. Dans une lettre à M. Mittag-Leffler, insérée dans les *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ* M. Hermite a retrouvé les mêmes résultats par une voie toute différente. D'après les conseils de M. Hermite j'ai entrepris de rechercher de nouveaux exemples de la particularité signalée par les deux savants géomètres.

Il y a une infinité de manières de définir une fonction, et si on ne s'imposait a priori aucune condition, rien ne serait plus facile que de concevoir une transcendante présentant un espace lacunaire quelconque; on pourrait imaginer par exemple une fonction définie de la manière suivante; elle devrait être égale à 1 à l'extérieur d'un certain cercle, et cesser d'exister à l'intérieur de ce cercle. Ce cercle serait alors un *espace lacunaire.* Si donc on donnait au mot, *fonctions à espaces lacunaires* le sens étendu qu'il semble comporter d'abord, on pourrait en imaginer arbitrairement une infinité. Il est donc nécessaire de préciser ce qu'on doit entendre par cette expression; *fonctions à espaces lacunaires.* C'est ce qui est facile, grâce à une conception nouvelle des fonctions analytiques qui a son origine dans les travaux de Cauchy et que M. Weierstrass a si clairement exposée dans son mémoire *Zur Functionenlehre* (Monatsberichte Août 1880, page 12).

Considérons une série développée suivant les puissances croissantes de $x - x_0$. Elle sera convergente à l'intérieur d'un certain cercle C_0 ayant pour centre x_0 et pour rayon R. Si on ne s'occupait que du développement lui-même, on pourrait considérer la fonction définie par la série comme cessant d'exister à l'extérieur du cercle de convergence, et toute la région du plan extérieure

à ce cercle comme formant un espace lacunaire. Ainsi comprise, la fonction à espaces lacunaires ne serait pas une notion analytique nouvelle. Mais il est un moyen bien connu d'étendre au-delà du cercle de convergence le domaine où la fonction envisagée existe. Si l'on considère un point x_1 intérieur au cercle de convergence, on pourra par la formule de Taylor développer la fonction en série ordonnée suivant les puissances de $x - x_1$ et convergente à l'intérieur d'un certain cercle C_1. A l'intérieur de C_1, on prendra un point x_2 et on développera la fonction en série ordonnée suivant les puissances de $x - x_2$ et convergente à l'intérieur d'un certain cercle C_2. La fonction se trouvera alors définie non seulement à l'intérieur du premier cercle de convergence, mais à l'intérieur de C_1, de C_2, etc.

Pour la plupart des fonctions qui ont été jusqu'ici l'objet des travaux des géomètres, les cercles tels que C_1, C_2, etc., recouvrent tout le plan, soit une fois, soit plusieurs fois, soit une infinité de fois, en laissant seulement de côté certains points isolés, appelés points singuliers. La fonction existe partout, sauf en des points isolés. *Il n'y a pas d'espace lacunaire.*

Mais il n'en est pas toujours ainsi; il peut arriver que les cercles C_1, C_2, etc., laissent de côté non des points isolés, mais toute une ligne, ou même toute une région du plan. M. Weierstrass a le premier mis cette vérité en lumière, et après lui M. Hermite a défini à l'aide d'intégrales multiples définies des transcendantes qui n'ont d'existence que dans un domaine limité.

On pourrait citer un grand nombre d'autres exemples de ce fait analytique. Ainsi l'on sait que les fonctions définies par les séries:

$$1 + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2^2} x^{3^2} + \dots + \frac{1}{2^n} x^{3^n} + \dots\dots$$

et $$x\,\varphi(1) + x^2\,\varphi(2) + \dots + x^n\,\varphi(n) + \dots\dots$$

(où $\varphi(n)$ représente la somme des puissances p^{es} des diviseurs de n) n'existent qu'à l'intérieur du cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Il en est de même de certaines fonctions que j'ai définies dans une note insérée aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (séances les 14 et 21 Février 1881) et que j'ai appelées fonctions fuchsiennes.

Les exemples que je veux étudier spécialement dans la présente note présenteront les particularités suivantes. Le plan sera divisé en deux régions, l'une extérieure, l'autre intérieure à un certain contour C *convexe.* A l'extérieur du contour la fonction envisagée sera holomorphe et uniforme (et par conséquent finie, continue, monodrome et monogène). A l'intérieur du contour elle cessera d'exister. La région intérieure à C sera un espace lacunaire.

Si x_0 est un point quelconque extérieure à C la fonction sera développable suivant les puissances de $x - x_0$; le cercle de convergence sera tangent extérieurement à C. Réciproquement si (x_0 étant un point quelconque extérieur à C) une fonction est développable suivant les puissances de $x - x_0$, de telle sorte que le cercle de convergence soit tangent extérieurement à C, il est clair que cette fonction offrira un espace lacunaire qui sera la région intérieure au contour C.

Voici maintenant comment je définirai une transcendante jouissant de ces propriétés. Envisageons la série suivante:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_n}{x - b_n} = \varphi(x)$$

Je suppose:

1° que la série:

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \operatorname{mod} A_n$$

soit convergente

2° que tous les points b_n soient intérieurs à C ou sur le contour C lui-même.

3° que si l'on prend sur le contour C un arc quelconque et aussi petit que l'on voudra, il y ait toujours une infinité de points b_n sur cet arc.

Je pose:

$$R_p = \sum_{n=p}^{n=\infty} \operatorname{mod} A_n. \qquad S = \sum_{n=0}^{n=\infty} \operatorname{mod} A_n.$$

La série (2) étant convergente, on pourra prendre p assez grand pour que R_p soit aussi petit que l'on veut.

Je dis d'abord que si x_0 est extérieur à C, la fonction $\varphi(x)$ définie par la série (1) peut se développer en série suivant les puissances de $x - x_0$, et que cette série est convergente à l'intérieur du cercle qui a pour centre x_0 et qui est tangent extérieurement à C. Si en effet R est le rayon de ce cercle, on aura pour tous les points b_n

$\operatorname{mod}(b_n - x_0) > R.$ Posons $\operatorname{mod}(x - x_0) = \Theta . R$

Supposons que x soit intérieur au cercle qui a pour centre x_0 et pour rayon R, on aura: $\Theta < 1.$

On aura évidemment:

$$-\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[\sum_{q=0}^{q=\infty} \left(A_n \frac{(x - x_0)^q}{(b_n - x_0)^{q+1}} \right) \right]$$

Il est clair:

1º que la série à termes positifs et à double entrée

$$(3) \quad \sum_{n=0,\ q=0}^{n=\infty,\ q=\infty} \frac{\operatorname{mod} A_n\ \Theta^{q+1}}{\operatorname{mod}(x-x_0)}$$

est convergente.

2º que

$$\operatorname{mod}\left[A_n \frac{(x-x_0)^q}{(b_n-x_0)^{q+1}}\right] < \frac{\operatorname{mod} A_n\ \Theta^{q+1}}{\operatorname{mod}(x-x_0)}$$

Il en résulte que les séries à double entrée:

$$(4) \quad \sum_{n=0,\ q=0}^{n=\infty,\ q=\infty} \operatorname{mod}\left[A_n \frac{(x-x_0)^q}{(b_n-x_0)^{q+1}}\right]$$

et

$$(5) \quad \sum_{n=0,\ q=0}^{n=\infty,\ q=\infty} A_n \frac{(x-x_0)^q}{(b_n-x_0)^{q+1}}$$

sont convergentes et que leur somme est indépendante de l'ordre des termes.

La somme de la série (5) sera donc $-\varphi(x)$ quel que soit l'ordre des termes. On aura donc:

$$(6) \quad -\varphi(x) = \sum_{q=0}^{q=\infty} B_q\ (x-x_0)^q$$

en posant:

$$B_q = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\ (b_n-x_0)^{-(q+1)}$$

J'ai donc démontré à la fois:

1º que si x est extérieur à C la série (2) est convergente et la fonction $\varphi(x)$ qu'elle définit est holomorphe et uniforme.

2º que si x est intérieur au cercle qui a pour centre x_0 et pour rayon R et qui est tangent extérieurement à C, la série (6) est convergente.

Je dis maintenant que la série (6) est divergente si x est sur ce cercle ou extérieur à ce cercle et pour le démontrer, je suppose d'abord que x_0 soit sur la normale élevée à C en un des points b_n, au point b_k par exemple.

Je me propose de faire voir que le terme

$$B_q\ R^q$$

ne tend pas vers 0 quand q tend vers l'infini; je vais montrer en effet que l'on peut prendre q assez grand pour que:

$$\bmod R^q \left[B_q - A_k \ (b_k - x_0)^{-(q+1)}\right] < \varepsilon.$$

quelque petit que soit ε.

Soit p un nombre entier assez grand pour que:

$$R_p < \frac{\varepsilon}{2} R.$$

Supposons en même temps

$$p > k.$$

Décrivons du point x_0 comme centre un cercle de rayon R' plus grand que R, mais assez petit pour que tous les points:

$$b_0, \ b_1, \ b_2, \ .\ .\ .\ .\ b_{k-2}, \ b_{k-1}, \ b_{k+1}, \ b_{k+2}, \ .\ .\ .\ .\ b_p$$

soient extérieurs à ce cercle. On aura:

$$\frac{R}{R'} < 1.$$

Soit maintenant q un nombre entier assez grand pour que:

$$\frac{S}{R'}\left(\frac{R}{R'}\right)^q < \frac{\varepsilon}{2}$$

On aura:

$$B_q - A_k \ (b_k - x_0)^{-(q+1)} = \sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{A_n}{(b_n - x_0)^{q+1}} + \sum_{n=k+1}^{n=p-1} \frac{A_n}{(b_n - x_0)^{q+1}} + \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{A_n}{(b_n - x_0)^{q+1}}$$

On aura:

$$\bmod R^q \left(B_q - A_k \ (b_k - x_0)^{-(q+1)}\right) < \bmod \left[\sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{A_n R^q}{(b_n - x_0)^{q+1}} + \sum_{n=k+1}^{n=p-1} \frac{A_n R^q}{(b_n - x_0)^{q+1}}\right]$$

$$+ \bmod \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{A_n R^q}{(b_n - x_0)^{q+1}}$$

$$< \sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{\bmod A_n}{R'}\left(\frac{R}{R'}\right)^q + \sum_{n=k+1}^{n=p-1} \frac{\bmod A_n}{R'}\left(\frac{R}{R'}\right)^q + \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{\bmod A_n}{R} < \frac{S}{R'}\left(\frac{R}{R'}\right)^q + \frac{R_p}{R} < \varepsilon$$

On a donc:

$$\lim R^q \left(B_q - A_k \ (b_k - x_0)^{-q+1}\right) = 0.$$

Or:

$$\bmod R^q A_k \ (b_k - x_0)^{-q+1}) = \frac{\bmod A_k}{R}$$

Il est donc impossible que $R^q A_k \ (b_k - x_0)^{-q+1}$ et par conséquent que $R^q B_q$ tende vers 0.

Supposons maintenant que x_0 ne soit pas sur la normale élevée à C en l'un des points b_n; je dis que la série (6) est encore divergente quand:

$$\text{mod}\,(x - x_0) > R.$$

En effet supposons que cela ne soit pas vrai et que le cercle de convergence ait un rayon R' plus grand que R. Ce cercle de convergence découperait sur le contour C un certain arc sur lequel, par hypothèse, il devrait y avoir une infinité de points b_n. Soit b_k l'un de ces points. Elevons en ce point une normale à C et prenons sur cette normale un point x_1 assez voisin de b_k pour que le cercle K qui passe par b_k et qui a x_1 pour centre soit tout entier intérieur au cercle qui a pour rayon R' et pour centre x_0; cela est évidemment toujours possible. La fonction $\varphi\,(x)$ pourrait alors se développer en série suivant les puissances de $x - x_1$ et cette série devrait être convergente, non seulement à l'intérieur du cercle K, mais sur la circonférence de ce cercle, ce qui est contraire à ce que je viens de démontrer.

Il est donc démontré que le cercle de convergence de la série (6) est toujours tangent extérieurement à C.

Donc la fonction $\varphi\,(x)$ est holomorphe et uniforme à l'extérieur de C et présente un espace lacunaire à l'intérieur de ce contour.

Je vais maintenant citer quelques exemples de séries satisfaisant aux conditions imposées à la série (1).

Soit d'abord:

$$(7) \qquad \varphi\,(x) = \sum \frac{u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots\ldots u_p^{m_p}}{x - \dfrac{m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \ldots\ldots + m_p\alpha_p}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_p}}$$

Je suppose:

1º que $u_1, u_2, \ldots\ldots u_p$ sont des quantités données de module plus petit que 1.

2º que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_p$ sont des constantes quelconques.

3º que $m_1, m_2, \ldots\ldots m_p$ prennent sous le signe Σ tous les systèmes de valeurs entières positives.

J'envisage le polygone P défini par les conditions suivantes:

1º Il est convexe.

2º Tous ses sommets font partie du système des points $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_p$.

3º Tous les points $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_p$ qui ne sont pas des sommets du polygône P sont sur le périmètre de ce polygône ou à son intérieur.

Il est clair que:

1º La série

$$\sum \bmod \left(u_1^{m_1} u_2^{m_2} \; .\; .\; .\; .\; u_p^{m_p} \right)$$

est convergente.

2º Tous les points

$$\frac{m_1\,\alpha_1 + m_2\,\alpha_2 + \; .\; .\; .\; .\; + \; m_p\,\alpha_p}{m_1 + m_2 + \; .\; .\; .\; . \; + m_p}$$

sont sur le périmétre de P ou bien à l'intérieur de ce polygône.

3º Sur tout segment, si petit qu'il soit, de l'un des côtés de P, il y a une infinité de points:

$$\frac{m_1\,\alpha_1 + m_2\,\alpha_2 + \; .\; .\; .\; . + \; m_p\,\alpha_p}{m_1 + m_2 + \; .\; .\; .\; .\; . + m_p}$$

Soit en effet $\alpha_1\,\alpha_2$ le côté du polygône consideré, il est clair qu'on pourra choisir les entiers positifs m_1 et m_2 (et cela d'une infinité de manières) de telle sorte que le point

$$\frac{m_1\,\alpha_1 + m_2\,\alpha_2}{m_1 + m_2}$$

soit situé sur un segment donné du côté $\alpha_1\,\alpha_2$.

Il en résulte que la fonction $\varphi\,(x)$ est holomorphe et uniforme à l'extérieur de P et présente un espace lacunaire à l'intérieur de ce polygône.

Dans le cas où $p = 3$, l'espace lacunaire se réduit au triangle $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$.

Dans le cas où $p = 2$, l'espace lacunaire se réduit à une ligne singulière essentielle qui est le segment de droite $\alpha_1\,\alpha_2$.

Comme second exemple je citerai la fonction dont voici l'origine.

Soit l'équation aux différences partielles:

$$(8) \qquad u_1\,F_1\,\frac{dz}{du_1} + u_2\,F_2\,\frac{dz}{du_2} + \; .\; .\; . + u_n\,F_n\,\frac{dz}{du_n} = z.$$

F_1, F_2, ... F_n sont des fonctions des n variables u_1, u_2 . . . . u_n et du paramètre x, holomorphes pour toutes les valeurs de x et lorsque les modules de u_1, u_2 . . . . u_n sont suffisamment petits. Elles se réduisent respectivement à

$$1, \; x - \alpha_2 \, , \; .\; .\; .\; .\; .\; . \; x - \alpha_n$$

quand on y annule tous les u.

Dans une thèse que j'ai soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris le 1er Août 1879, j'ai démontré que si le point x est extérieur au polygône convexe P circonscrit aux n points α_1, α_2 . . . . α_n, il existe une série S ordonnée suivant les puissances des u, convergente et satisfaisant à l'équation

(8) pourvu que les modules de ces variables soient assez petits. Les coëfficients de cette série sont des fonctions rationnelles de x; si on donne aux u des valeurs de module suffisamment petit et qu'on les considère comme des constantes, la somme de la série est une fonction de x, et l'on peut voir qu'elle est analogue à la fonction $\varphi(x)$ définie par la série (1) et qu'elle présente comme elle un espace lacunaire. Le polygône P est compris tout entier dans cet espace lacunaire.



SUR LA

PROPAGATION ET LA POLARISATION DE LA LUMIÈRE DANS LES CRISTAUX;

PAR M. ÉMILE SARRAU,
Sous-Ingénieur des Manufactures de l'État.

[Extrait du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, tome XII, 1867.]

PREMIER MÉMOIRE.

La théorie mathématique des phénomènes optiques produits par les cristaux nous paraît reposer sur deux principes fondamentaux :

1° La modification périodique de l'éther dans les milieux cristallisés;

2° La modification spéciale qu'éprouve la constitution de l'éther par suite de la symétrie propre au milieu cristallisé.

C'est à ce double point de vue que nous recherchons dans ce Mémoire quelques propriétés très-générales des équations qui régissent les vibrations de l'éther renfermé dans un cristal, réservant pour un nouveau travail l'analyse des conséquences qui en résultent pour l'étude des phénomènes.

C'est Cauchy qui a indiqué le premier l'influence des perturbations dues à la constitution périodique de l'éther. L'illustre géomètre a créé ainsi un principe nouveau, fécond en conséquences, et vraisembla-

blement destiné à donner la solution des problèmes qui, depuis Fresnel, ont si souvent occupé les géomètres et les physiciens. Il importait cependant de donner aux équations qu'il a obtenues une forme plus explicite et de les compléter par des termes qu'il néglige et qui ont une influence sensible. Nous essayons de le faire dans le premier Chapitre de ce Mémoire.

Le second est consacré à l'étude des modifications qu'éprouvent les équations des mouvements vibratoires par suite de la symétrie cristalline. Nous prenons comme point de départ les belles *Études cristallographiques* de Bravais. Suivant sa théorie, un cristal est caractérisé par le nombre et la disposition des éléments de symétrie communs au polyèdre moléculaire et à l'assemblage. Ces éléments déterminent la forme cristalline et se déduisent, inversement, de la forme cristalline observée.

Appliquant ces principes à la théorie des phénomènes lumineux, nous admettons que tout élément de symétrie commun à la molécule et à l'assemblage est un élément de symétrie des atomes de l'éther. L'expression analytique de ce fait assigne aux équations une forme spéciale, variable non-seulement avec le système cristallin, mais encore avec les divers cas de mériédrie que peut offrir chaque système.

C'est ainsi que s'établissent entre les phénomènes optiques des corps et leur forme cristalline des relations dont les conséquences sont particulièrement importantes, parce que leur vérification expérimentale doit être considérée comme une confirmation, non-seulement de la théorie des ondes, mais encore des conceptions sur lesquelles repose aujourd'hui l'explication des lois cristallographiques.

CHAPITRE I.

SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES QUI RÉGISSENT LES VIBRATIONS DE L'ÉTHER RENFERMÉ DANS UN MILIEU CRISTALLISÉ INDÉFINI.

1. Suivant la théorie physique généralement admise, les phénomènes lumineux résultent des vibrations d'un milieu particulier appelé *éther*. On suppose que l'éther existe dans tout l'espace et pénètre les

corps matériels dans l'intérieur desquels son état statique dépend à la fois des actions qu'il exerce sur lui-même et de celles qu'exercent sur lui les atomes matériels.

L'éther répandu dans le vide peut être considéré comme homogène. Dans les milieux matériels, sa constitution varie nécessairement d'un point à l'autre de l'espace : dans les milieux cristallisés, cette variation est *périodique*.

2. En effet, suivant les minéralogistes, les centres de gravité des molécules des cristaux forment un assemblage régulier de points situés sur les sommets de cellules parallélipipédiques égales déterminées par trois systèmes de plans équidistants et parallèles à trois plans fixes rectangulaires ou obliques.

Toutes les molécules sont, en outre, identiquement orientées, de sorte que les atomes correspondants occupent des positions homologues dans les diverses cellules. Cette disposition des atomes matériels entraîne évidemment une disposition analogue des atomes de l'éther, de sorte que la constitution de l'éther, variable dans l'intérieur d'une même cellule, est la même aux points correspondants de plusieurs cellules différentes.

L'éther renfermé dans un cristal peut donc être considéré comme un système *périodiquement homogène*.

3. Nous admettons que, dans les phénomènes lumineux, les vibrations de la matière sont insensibles. Dans cette hypothèse, il est aisé de déterminer la forme essentielle des équations qui représentent les vibrations de l'éther. Ces équations sont au nombre de trois et déterminent les projections du déplacement atomique sur trois axes fixes. Elles sont linéaires, aux dérivées partielles, et les coefficients sont des fonctions des coordonnées, variables avec la constitution de l'éther, dans l'intérieur du milieu matériel. Si ce milieu est cristallisé, il suffit de prendre les axes parallèles aux arêtes d'un des systèmes parallélipipédiques déterminés par les centres de gravité des molécules matérielles, pour réduire les coefficients à des fonctions périodiques ayant pour périodes les arêtes d'un parallélipipède élémentaire.

4. L'intégration de ces équations à coefficients périodiques peut

être ramenée, comme Cauchy l'a fait voir, à celle d'un système d'équations aux dérivées partielles et à coefficients constants.

Il suffit de substituer aux coefficients et aux fonctions inconnues leurs développements en séries ordonnées suivant les puissances entières positives et négatives de trois exponentielles trigonométriques ayant respectivement pour périodes les trois paramètres de l'assemblage moléculaire, et d'égaler, dans le résultat obtenu par cette substitution dans les équations, les coefficients des puissances semblables des exponentielles.

5. En opérant comme on vient de le dire, la différence entre un des trois déplacements composants d'un atome d'éther et sa *valeur moyenne* (c'est-à-dire le terme de son développement indépendant des exponentielles) se compose de termes proportionnels à des exponentielles reprenant périodiquement la même valeur dans des intervalles comparables aux intervalles moléculaires des corps. Or, ces dimensions étant insaisissables, il est naturel de supposer que, dans la théorie de la lumière, les termes dont il s'agit n'ont qu'une influence inappréciable à nos organes et qu'on pourra les négliger en réduisant les déplacements à leurs valeurs moyennes.

6. Le système d'équations à coefficients constants que fournit la méthode qui vient d'être indiquée renferme avec les valeurs moyennes des déplacements les coefficients des exponentielles trigonométriques qui entrent dans leurs développements. En éliminant ces derniers, on obtient trois équations aux dérivées partielles et à coefficients constants auxquelles doivent satisfaire les valeurs moyennes des inconnues.

C'est le système de ces équations, appelées par Cauchy équations *auxiliaires*, qui paraît représenter les phénomènes optiques des milieux cristallisés.

7. Il importe d'observer que les équations auxiliaires sont fort différentes de celles que l'on obtiendrait en réduisant les coefficients périodiques à leurs valeurs moyennes, c'est-à-dire à des constantes. Elles dépendent, en effet, des termes qui, dans le développement des coefficients, sont proportionnels aux puissances des exponentielles. Ce sont précisément ces termes qui, loin d'être négligeables, comme

on le suppose en réalité dans les théories généralement admises, renferment l'explication des phénomènes lumineux produits par les cristaux.

8. L'étude des perturbations dues à la périodicité de l'éther étant fondamentale, il est nécessaire d'exposer d'abord l'analyse qui conduit aux équations auxiliaires. La marche suivie dans ce Chapitre a été indiquée par Cauchy [*].

Analyse.

9. Considérons l'éther renfermé dans l'intérieur d'un corps quelconque. Prenant d'abord le système de ses atomes dans un état d'équilibre, désignons par x, y, z les coordonnées d'un de ces atomes m. Soient h, k, l les accroissements de ces coordonnées quand on passe de l'atome m à un atome voisin m'.

Les composantes de l'action mutuelle des atomes m, m' sont des fonctions de h, k, l devenant insensibles dès que ces variables dépassent de très-petites valeurs.

Supposons en second lieu que l'éther vibre, et désignons par u, v, w les projections du déplacement de l'atome m sur les axes de coordonnées. Les déplacements de m' seront $u + \delta u$, $v + \delta v$, $w + \delta w$, la caractéristique δ exprimant les accroissements qu'éprouvent les fonctions u, v, w quand les variables x, y, z s'accroissent de h, k, l. Les composantes de la force accélératrice exercée par m' sur m seront des fonctions de $h + \delta u$, $k + \delta v$, $l + \delta w$, projections de la distance mm' sur les axes. Elles pourront donc être réduites à des fonctions linéaires de δu, δv, δw si l'on suppose les différences des déplacements assez petites pour négliger leurs produits. Il suffit d'ajouter les composantes des forces accélératrices exercées par tous les atomes tels que m', pour obtenir la force accélératrice totale exercée sur l'atome m par l'éther qui l'environne.

Les composantes de l'action exercée par la matière sur m sont des fonctions linéaires de u, v, w quand les déplacements sont très-petits.

On obtiendra enfin les équations du mouvement de m en égalant les

---

[*] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXX, p. 17.

composantes de l'action exercée sur ce point par l'éther et la matière aux dérivées secondes de u, v, w prises par rapport au temps.

10. On a ainsi trois équations linéaires aux différences mêlées. Elles deviennent linéaires aux dérivées partielles en développant les δ par la série de Taylor. Les développements sont très-convergents à cause de la petitesse de h, k, l pour tous les points situés dans la sphère d'action de m.

11. On peut donc énoncer cette conclusion :

La forme la plus générale des équations qui régissent les vibrations très-petites de l'éther s'obtient en égalant la dérivée seconde, prise par rapport au temps de chacun des déplacements u, v, w à une fonction linéaire de ces déplacements, et de leurs dérivées de tous les ordres prises par rapport à x, y, z.

Les seconds membres de ces équations ne renferment pas de termes indépendants de u, v, w. En effet, ils doivent s'annuler avec u, v, w, puisque le système est en équilibre quand les déplacements sont nuls.

Si on prend pour axes de coordonnées un système d'axes de l'assemblage moléculaire, les coefficients des équations sont des fonctions périodiques des coordonnées.

Le système des trois équations fondamentales peut donc s'écrire comme il suit :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} D_t^2 u &= F_1 u + F_2 v + F_3 w, \\ D_t^2 v &= G_1 u + G_2 v + G_3 w, \\ D_t^2 w &= H_1 u + H_2 v + H_3 w; \end{aligned}\right.$$

les F, G, H étant des fonctions entières symboliques de D_x, D_y, D_z, dont les coefficients sont des fonctions périodiques de x, y, z.

Le problème de la propagation de la lumière dans un milieu indéfini consiste à trouver des fonctions satisfaisant aux équations (1), et se réduisant à des fonctions données de x, y, z, ainsi que leurs dérivées premières par rapport à t, pour $t = 0$.

Avant d'appliquer la méthode d'intégration, il convient d'introduire une notation qui simplifie l'écriture.

12. Le second membre de chacune des équations (1) peut être con-

sidéré comme une fonction symbolique de D_x, D_y, D_z et de u, v, w, linéaire et homogène par rapport à ces dernières variables. On peut donc écrire comme il suit le système (1) :

$$(2)\qquad \begin{cases} D_t^2 u = F(D_x, D_y, D_z, u, v, w), \\ D_t^2 v = G(D_x, D_y, D_z, u, v, w), \\ D_t^2 w = H(D_x, D_y, D_z, u, v, w). \end{cases}$$

Les fonctions F, G, H jouissent des propriétés suivantes.

1° Si on suppose

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2,$$

on a

$$(3)\qquad \begin{cases} F(D_x, D_y, D_z, u_1 + u_2, v_1 + v_2, w_1 + w_2) = F(D_x, D_y, D_z, u_1, v_1, w_1) \\ \qquad\qquad + F(D_x, D_y, D_z, u_2, v_2, w_2). \end{cases}$$

2° Si on suppose en second lieu

$$u = u_1 \varepsilon, \quad v = v_1 \varepsilon, \quad w = w_1 \varepsilon,$$

u_1, v_1, w_1 étant des fonctions de x, y, z, et ε une exponentielle de la forme $\varepsilon = e^{ax+by+cz}$, on a

$$(4)\qquad \begin{cases} F(D_x, D_y, D_z, u_1\varepsilon, v_1\varepsilon, w_1\varepsilon) \\ \quad = F(D_x + a, D_y + b, D_z + c, u_1, v_1, w_1)\varepsilon. \end{cases}$$

La première propriété est évidente : en effet, un terme quelconque $AD_x^p D_y^q D_z^r$ de la fonction F donne identiquement

$$AD_x^p D_y^q D_z^r (u_1 + u_2) = AD_x^p D_y^q D_z^r u_1 + AD_x^p D_y^q D_z^r u_2.$$

Pour établir la seconde, il suffit d'observer que le terme simple $D_x u$ donne, en supposant $u = u_1 \varepsilon$,

$$D_x u = D_x u_1 . \varepsilon + u_1 . D_x \varepsilon = (D_x u_1 + a u_1)\varepsilon,$$

ou symboliquement

$$D_x u = (D_x + a) u_1 . \varepsilon.$$

On établit de la même manière l'égalité symbolique

$$AD_x^p D_y^q D_z^r u = A(D_x + a)^p (D_y + b)^q (D_z + c)^r u_1 . \varepsilon,$$

d'où l'on déduit immédiatement la formule (4).

13. Considérons actuellement une des équations (2), la première par exemple.

Chaque coefficient A de F est une fonction périodique de x, y, z. Désignons par a, b, c les résultats obtenus en divisant 2π par les périodes dont on peut accroître respectivement x, y, z sans changer la valeur de cette fonction, et par e, f, g les trois exponentielles imaginaires e^{axi}, e^{byi}, e^{czi}. D'après une propriété générale des fonctions périodiques, on a

$$(5) \qquad A = A_0 + \sum_m A_{m,m',m''} e^m f^{m'} g^{m''},$$

m, m', m'' étant trois nombres entiers positifs ou négatifs.

En développant ainsi en série tous les coefficients périodiques de F, on obtient

$$(6) \left\{ \begin{aligned} F(D_x, D_y, D_z, u, v, w) &= F_0(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\ &+ \sum_m F_{m,m',m''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) e^m f^{m'} g^{m''}. \end{aligned} \right.$$

Les fonctions G et H étant développées de la même manière, le système (2) devient

$$(7) \left\{ \begin{aligned} D_t^2 u &= F_0(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\ &\quad + \sum_m F_{m,m',m''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) e^m f^{m'} g^{m''}, \\ D_t^2 v &= G_0(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\ &\quad + \sum_m G_{m,m',m''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) e^m f^{m'} g^{m''}, \\ D_t^2 w &= H_0(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\ &\quad + \sum_m H_{m,m',m''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) e^m f^{m'} g^{m''}. \end{aligned} \right.$$

14. Posons actuellement

$$(8)\qquad \begin{cases} u = u_0 + \sum_n u_{n,n',n''} e^n f^{n'} g^{n''}, \\ v = v_0 + \sum_n v_{n,n',n''} e^n f^{n'} g^{n''}, \\ w = w_0 + \sum_n w_{n,n',n''} e^n f^{n'} g^{n''}; \end{cases}$$

$u_{n,n',n''}$, $v_{n,n',n''}$, $w_{n,n',n''}$ étant des fonctions de x, y, z, t à déterminer.

La substitution des développements (8) dans les équations (7) s'opère sans difficulté, grâce aux remarques du nº 12, et on obtient trois équations telles que la suivante :

$$(9)\qquad \begin{cases} D_t^2 u_0 + \sum_p D_t^2 u_{p,p',p''} e^p f^{p'} g^{p''} \\ \quad = F_0(D_x, D_y, D_z, u_0, v_0, w_0) \\ \qquad + \sum_m F_{m,m',m''}(D_x, D_y, D_z, u_0, v_0, w_0) e^m f^{m'} g^{m''} \\ \qquad + \sum_n F_0(D_x + nai, D_y + n'bi, D_z + n''ci, \\ \qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}) e^n f^{n'} g^{n''} \\ \qquad + \sum_m \sum_n F_{m,m',m''}(D_x + nai, D_y + n'bi, D_z + n''ci, \\ \qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}) e^{m+n} f^{m'+n'} g^{m''+n''}. \end{cases}$$

En identifiant dans ces équations les coefficients des puissances semblables de e, f, g, on a un système d'équations aux dérivées partielles et à coefficients constants auquel doivent satisfaire les fonctions inconnues.

15. En opérant ainsi, on obtient :

1º Trois équations obtenues en identifiant les termes indépendants

de e, f, g, savoir :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} D_t^2 u_0 &= F_0(D_x, D_y, D_z, u_0, v_0, w_0) \\ &\quad + \sum_m \sum_n F_{m,m',m''}(D_x + nai, D_y + n'bi, D_z + n''ci, \\ &\qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}), \\ D_t^2 v_0 &= G_0(D_x, D_y, D_z, u_0, v_0, w_0) \\ &\quad + \sum_m \sum_n G_{m,m',m''}(D_x + nai, D_y + n'bi, D_z + n''ci, \\ &\qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}), \\ D_t^2 w_0 &= H_0(D_x, D_y, D_z, u_0, v_0, w_0) \\ &\quad + \sum_m \sum_n H_{m,m',m''}(D_x + nai, D_y + n'bi, D_z + n''ci, \\ &\qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}), \end{aligned}\right.$$

les doubles $\sum$ s'étendant aux valeurs de m, m', m'', n, n', n'', différentes de zéro, qui satisfont aux conditions

$$m + n = 0, \quad m' + n' = 0, \quad m'' + n'' = 0.$$

2° Un système d'équations ayant une forme analogue aux trois suivantes, obtenues en identifiant les termes qui contiennent le produit $e^p f^{p'} g^{p''}$:

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} D_t^2 u_{p,p',p''} &= F_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u_0, v_0, w_0) \\ &\quad + F_0(D_x + pai, D_y + p'bi, D_z + p''ci, u_{p,p',p''}, v_{p,p',p''}, w_{p,p',p''}) \\ &\quad + \sum_m \sum_n F_{m,m',m''}(D_x + nai, D_y + n'bi, D_z + n''ci, \\ &\qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}), \\ D_t^2 v_{p,p',p''} &= G_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u_0, v_0, w_0) \\ &\quad + G_0(D_x + pai, D_y + p'bi, D_z + p''ci, u_{p,p',p''}, v_{p,p',p''}, w_{p,p',p''}) \\ &\quad + \sum_m \sum_n G_{m,m',m''}(D_x + nai, D_y + n'bi, D_z + n''ci, \\ &\qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}), \\ D_t^2 w_{p,p',p''} &= H_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u_0, v_0, w_0) \\ &\quad + H_0(D_x + pai, D_y + p'bi, D_z + p''ci, u_{p,p',p''}, v_{p,p',p''}, w_{p,p',p''}) \\ &\quad + \sum_m \sum_n H_{m,m',m''}(D_x + nai, D_y + n'bi, D_z + n''ci, \\ &\qquad\qquad u_{n,n',n''}, v_{n,n',n''}, w_{n,n',n''}), \end{aligned}\right.$$

Les doubles $\sum$ s'étendant aux valeurs de m, m', m'', n, n', n'' différentes de zéro, qui satisfont aux conditions

$$m+n=p, \quad m'+n'=p', \quad m''+n''=p''.$$

16. Rigoureusement, les développements (5) et (8) se composant d'un nombre infini de termes, le nombre des équations (11) est lui-même infini. Dans tout ce qui va suivre, nous raisonnerons comme si le nombre de ces équations était limité, en étendant au cas réel toutes les propriétés indépendantes du nombre des termes conservés.

17. Observant actuellement que les dimensions des intervalles dans lesquels se manifeste la périodicité des coefficients sont insensibles, on est conduit à supposer que, dans la production des phénomènes lumineux, les valeurs moyennes des déplacements ont seules une influence appréciable. En conséquence, il y a lieu d'éliminer entre les équations aux dérivées partielles (10) et (11) toutes les inconnues, à l'exception des trois qui représentent les valeurs moyennes des déplacements. Pour montrer comment on peut effectuer dans certains cas cette élimination, il est nécessaire de rappeler la méthode d'intégration applicable aux équations aux dérivées partielles à coefficients constants.

18. On obtient des intégrales particulières des équations (10) et (11), en supposant toutes les inconnues proportionnelles à une même exponentielle, de sorte que

$$(12) \quad \frac{u_0}{P_0}=\frac{v_0}{Q_0}=\frac{w_0}{R_0}=\cdots=\frac{u_{n,n',n''}}{P_{n,n',n''}}=\frac{v_{n,n',n''}}{Q_{n,n',n''}}=\frac{w_{n,n',n''}}{R_{n,n',n''}}=\ldots=e^{\alpha x+\beta y+\gamma z+\sigma t},$$

α, β, γ, σ et les P, Q, R étant des constantes réelles ou imaginaires, assujetties à satisfaire au système que l'on obtient en substituant les valeurs particulières (12) dans les équations (10) et (11), ce qui se fait très-simplement en remplaçant dans ces équations D_x, D_y, D_z, D_t, par α, β, γ, σ, et en écrivant partout P, Q, R au lieu de u, v, w.

Ces équations sont les suivantes :

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sigma^2 P_0 = F_0(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0) \\
&\qquad + \sum_m \sum_n F_{m,m',m''}(\alpha + nai, \beta + n'bi, \gamma + n''ci, P_{n,n',n''}, Q_{n,n',n''}, R_{n,n',n''}), \\
&\sigma^2 Q_0 = G_0(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0) \\
&\qquad + \sum_m \sum_n G_{m,m',m''}(\alpha + nai, \beta + n'bi, \gamma + n''ci, P_{n,n',n''}, Q_{n,n',n''}, R_{n,n',n''}), \\
&\sigma^2 R_0 = H_0(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0) \\
&\qquad + \sum_m \sum_n H_{m,m',m''}(\alpha + nai, \beta + n'bi, \gamma + n''ci, P_{n,n',n''}, Q_{n,n',n''}, R_{n,n',n''}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sigma^2 P_{p,p',p''} \\
&\quad = F_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0) \\
&\qquad + F_0(\alpha + pai, \beta + p'bi, \gamma + p''ci, P_{p,p',p''}, Q_{p,p',p''}, R_{p,p',p''}) \\
&\qquad + \sum_m \sum_n F_{m,m',m''}(\alpha + nai, \beta + n'bi, \gamma + n''ci, P_{n,n',n''}, Q_{n,n',n''}, R_{n,n',n''}), \\
&\sigma^2 Q_{p,p',p''} \\
&\quad = G_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0) \\
&\qquad + G_0(\alpha + pai, \beta + p'bi, \gamma + p''ci, P_{p,p',p''}, Q_{p,p',p''}, R_{p,p',p''}) \\
&\qquad + \sum_m \sum_n G_{m,m',m''}(\alpha + nai, \beta + n'bi, \gamma + n''ci, P_{n,n',n''}, Q_{n,n',n''}, R_{n,n',n''}), \\
&\sigma^2 R_{p,p',p''} \\
&\quad = H_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0) \\
&\qquad + H_0(\alpha + pai, \beta + p'bi, \gamma + p''ci, P_{p,p',p''}, Q_{p,p',p''}, R_{p,p',p''}) \\
&\qquad + \sum_m \sum_n H_{m,m',m''}(\alpha + nai, \beta + n'bi, \gamma + n''ci, P_{n,n',n''}, Q_{n,n',n''}, R_{n,n',n''}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Lorsque l'on connaît plusieurs intégrales particulières des équations (10) et (11), il suffit de les combiner par voie d'addition pour obtenir de nouvelles intégrales.

Une fonction quelconque de plusieurs variables pouvant d'ailleurs être représentée par la somme d'un nombre fini ou infini de termes

respectivement proportionnels à des exponentielles dont les exposants sont des fonctions linéaires réelles ou imaginaires de ces variables, il est clair que tout système d'intégrales des équations (9) sera toujours la somme d'un nombre fini ou infini d'intégrales de la forme (12).

19. Cela posé, on peut éliminer entre les équations (13) et (14) les coefficients $P_{n,n',n''}$, $Q_{n,n',n''}$, $R_{n,n',n''}$ correspondant à toutes les valeurs entières des indices, de manière à avoir trois équations entre P_0, Q_0, R_0, α, β, γ, σ. Il suffit pour cela de déduire les $P_{n,n',n''}$, $Q_{n,n',n''}$, $R_{n,n',n''}$ des équations (14) et de les substituer dans les équations (13). Leurs valeurs sont des fonctions linéaires et homogènes des termes de la forme

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} F_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0), \\ G_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0), \\ H_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0), \end{array}\right.$$

et on peut poser, par exemple,

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} P_{n,n',n''} = \sum_p A_{p,p',p''} F_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0), \\ \qquad + \sum_p B_{p,p',p''} G_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0), \\ \qquad + \sum_p C_{p,p',p''} H_{p,p',p''}(\alpha, \beta, \gamma, P_0, Q_0, R_0), \end{array}\right.$$

les A, B, C étant des fonctions de α, β, γ, σ^2. Les expressions des $Q_{n,n',n''}$ et $R_{n,n',n''}$ sont de la même forme.

En substituant ces expressions dans les équations (13), les seconds membres de ces équations deviennent des fonctions linéaires et homogènes des termes (15), ayant pour coefficients des fonctions de α, β, γ, σ^2. Pour ne pas multiplier les notations, nous désignerons ces nouveaux coefficients par les lettres A, B, C affectées d'indices.

On a ainsi :

$$
(17)\left\{\begin{aligned}
\sigma^2 P_0 = F_0(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0) &+ \sum_p A_{p,p',p''} F_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0) \\
&+ \sum_p B_{p,p',p''} G_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0) \\
&+ \sum_p C_{p,p',p''} H_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0), \\
\sigma^2 Q_0 = G_0(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0) &+ \sum_p A'_{p,p',p''} F_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0) \\
&+ \sum_p B'_{p,p',p''} G_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0) \\
&+ \sum_p C'_{p,p',p''} H_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0), \\
\sigma^2 R_0 = H_0(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0) &+ \sum_p A''_{p,p',p''} F_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0) \\
&+ \sum_p B''_{p,p',p''} G_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0) \\
&+ \sum_p C''_{p,p',p''} H_{p,p',p''}(\alpha,\beta,\gamma,P_0,Q_0,R_0).
\end{aligned}\right.
$$

20. Nous ne considérons, dans ce Mémoire, que le cas où les fonctions A, B, C sont développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières et positives de α, β, γ, σ^2. C'est ce qui a lieu, en général, quand les modules de ces quantités sont très-petits par rapport aux quantités a, b, c définies au n° **13**.

En supposant, dans ce cas, les séries limitées par approximation à un certain nombre de termes, les seconds membres des équations (17) se réduisent à des fonctions entières à coefficients constants des variables α, β, γ, σ^2, P_0, Q_0, R_0 linéaires et homogènes par rapport aux trois dernières.

Or, ces équations sont alors celles que l'on obtiendrait en cherchant à intégrer, par la méthode des intégrales particulières indiquée au n° **18**, le système suivant d'équations aux dérivées partielles et à coefficients constants :

$$
(18)\left\{
\begin{aligned}
D_t^2 u &= F_0(D_x, D_y, D_z, u, v, w) + \sum_p A_{p,p',p''} F_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\
&\quad + \sum_p B_{p,p',p''} G_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\
&\quad + \sum_p C_{p,p',p''} H_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w), \\
D_t^2 v &= G_0(D_x, D_y, D_z, u, v, w) + \sum_p A'_{p,p',p''} F_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\
&\quad + \sum_p B'_{p,p',p''} G_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\
&\quad + \sum_p C'_{p,p',p''} H_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w), \\
D_t^2 w &= H_0(D_x, D_y, D_z, u, v, w) + \sum_p A''_{p,p',p''} F_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\
&\quad + \sum_p B''_{p,p',p''} G_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w) \\
&\quad + \sum_p C''_{p,p',p''} H_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w),
\end{aligned}
\right.
$$

obtenu en remplaçant, dans le système (17), α, β, γ, σ, P_0, Q_0, R_0 par D_x, D_y, D_z, D_t, u, v, w, et où, par conséquent, les A, B, C sont des fonctions entières de D_x, D_y, D_z, D_t^2.

21. Le système des équations (18) est donc celui qu'il s'agissait d'obtenir au n° **17**, et si on veut se borner à étudier les lois qui régissent les *vibrations atomiques moyennes* de l'éther, on est conduit à intégrer généralement le système des équations (19), qu'il convient d'appeler, avec Cauchy, *équations auxiliaires*.

Les déplacements moyens sont seuls considérés dans ce qui suit, et on peut les désigner désormais par les notations u, v, w, attribuées jusqu'à présent aux déplacements effectifs.

22. La forme des équations auxiliaires dépend d'une manière très-simple de celle des équations (2) à coefficients périodiques. En effet, un terme $F_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w)$, compris dans le développe-

ment (8), s'obtient en substituant, dans la fonction

$$F(D_x, D_y, D_z, u, v, w),$$

des constantes aux coefficients périodiques. Par suite, une somme de termes de la forme

$$\sum A_{p,p',p''} F_{p,p',p''}(D_x, D_y, D_z, u, v, w)$$

donne un résultat égal à celui que l'on obtiendrait en substituant à la place des coefficients périodiques, dans la fonction F, des fonctions entières de D_x, D_y, D_z, D_t^2.

On peut donc énoncer le résultant suivant :

THÉORÈME. — *Les trois équations auxiliaires s'obtiennent en égalant la dérivée seconde de chaque variable, prise par rapport au temps, à la somme de trois expressions obtenues en substituant des fonctions entières à coefficients constants de* D_x, D_y, D_z, D_t^2 *aux coefficients périodiques des fonctions* F, G, H *définies au* n° **12**.

23. Il importe d'observer que l'on peut, par l'emploi de substitutions successives, ramener le second membre des équations auxiliaires à ne pas renfermer de dérivées relatives au temps. En effet, si on suppose les seconds membres des équations (17) développées en séries de termes décroissants ordonnés suivant les puissances ascendantes de σ^2, on a, en réduisant ces séries aux termes indépendants de σ^2, des valeurs approchées de $\sigma^2 P_0$, $\sigma^2 Q_0$, $\sigma^2 R_0$ qui, étant substituées dans les termes en σ^2 des séries, donnent lieu à une seconde approximation, et ainsi de suite.

En opérant ainsi, on élimine σ dans les seconds membres des équations (17), et par conséquent D_t dans les seconds membres des équations (20).

On peut alors, dans l'énoncé du théorème précédent, substituer aux fonctions entières de D_x, D_y, D_z, D_t^2 des fonctions entières de D_x, D_y, D_z seulement.

24. En résumé, comme conclusion de l'analyse qui précède, on

obtient les deux propositions suivantes, fondamentales dans la théorie mathématique des phénomènes lumineux :

Théorème I. — *Dans tout milieu cristallisé, les trois équations qui régissent les vibrations très-petites de l'éther sont des équations linéaires aux dérivées partielles que l'on obtient en égalant la dérivée seconde prise par rapport au temps de chacun des trois déplacements* u, v, w *à une fonction linéaire, à coefficients périodiques, de ces déplacements et de leurs dérivées partielles de tous les ordres prises par rapport à* x, y, z.

Théorème II. — *Dans tout milieu cristallisé, les trois équations qui régissent les vibrations moyennes de l'éther sont des équations linéaires, aux dérivées partielles et à coefficients constants, que l'on obtient en égalant la dérivée seconde de chaque déplacement moyen prise par rapport au temps, à la somme de trois expressions résultant de la substitution de fonctions entières de* D_x, D_y, D_z *aux coefficients périodiques des seconds membres des équations auxquelles satisfont, d'après le théorème précédent, les déplacements effectifs.*

Si donc on représente par

$$(19)\quad \begin{cases} D_t^2 u = F(D_x, D_y, D_z, u, v, w), \\ D_t^2 v = G(D_x, D_y, D_z, u, v, w), \\ D_t^2 w = H(D_x, D_y, D_z, u, v, w), \end{cases}$$

les équations à coefficients périodiques auxquelles satisfont les déplacements effectifs, les équations auxiliaires auxquelles satisfont les déplacements moyens seront de la forme

$$(20)\quad \begin{cases} D_t^2 u = F' + G' + H', \\ D_t^2 v = F'' + G'' + H'', \\ D_t^2 w = F''' + G''' + H''', \end{cases}$$

F', F'', F''' désignant des fonctions symboliques obtenues en substituant des fonctions entières de D_x, D_y, D_z aux coefficients périodiques de la fonction F, et G', G'', G''', ainsi que H', H'', H''', se déduisant de la même manière des fonctions G et H.

25. Ces résultats, obtenus en supposant les axes de coordonnées parallèles aux arêtes d'un parallélipipède élémentaire de l'assemblage cristallin, subsistent avec des axes quelconques.

Supposons, en effet, que les équations (2) soient celles qui représentent les vibrations de l'éther rapportées non plus à un système S' d'axes parallèles aux arêtes d'un parallélipipède élémentaire, mais à un système S d'axes dirigé d'une manière quelconque.

Soient x', y', z' et x, y, z les coordonnées d'un point par rapport aux systèmes S' et S; x', y', z' étant des fonctions linéaires et homogènes de x, y, z.

Un coefficient quelconque des équations (2), fonction périodique de x', y', z', est développable en série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de trois exponentielles dont les exposants sont des fonctions linéaires et homogènes de x, y, z. En désignant par e, f, g ces trois exponentielles, les équations (5), (7), (8) subsistent, et l'on voit aisément que rien n'est à changer aux conséquences qui s'en déduisent.

On peut donc rapporter les vibrations de l'éther à un système d'axes *rectangulaires*, quel que soit le système cristallin. Après avoir déterminé la forme correspondante des fonctions F, G, H, on en déduira les équations auxiliaires par la règle que fournit le deuxième théorème du n° **24**.

25. Par suite de cette règle, tout se réduit à déterminer pour chaque milieu la forme des fonctions F, G, H. L'analyse du n° **9** établit la forme essentielle des fonctions dont il s'agit avec une généralité qu'on ne peut restreindre sans admettre de nouvelles hypothèses sur la constitution intime de l'éther et de la matière.

Un second Mémoire sera consacré à examiner les résultats auxquels conduit une hypothèse fort simple dont les conséquences paraissent conformes aux faits d'expérience. Cette hypothèse réduit notablement la forme des fonctions F, G, H, et par suite celle des équations auxiliaires.

Enfin, de nouvelles et importantes simplifications résultent de la symétrie propre au milieu cristallisé que l'on considère. C'est à l'étude de ces réductions qui établissent de remarquables relations entre les

phénomènes optiques et les lois cristallographiques qu'est consacré le Chapitre II du présent Mémoire.

26. En dehors de toute hypothèse et en laissant aux équations auxiliaires toute la généralité qu'elles comportent, elles renferment un nombre fort considérable de coefficients indéterminés.

Si l'on suppose, par exemple, que les fonctions F, G, H sont du second ordre par rapport à D_x, D_y, D_z et renferment les six dérivées partielles de chaque déplacement, si de plus on se borne dans les équations auxiliaires aux termes du second ordre, on voit que le nombre total des coefficients distincts peut s'élever à $18 \times 3 = 54$.

27. Il importe d'observer que le théorème général du n° **24** a été obtenu en supposant (n° **20**) que les fonctions A, B, C sont développables en séries très-convergentes ordonnées suivant les puissances entières et positives de α, β, γ, σ^2. Cette condition est remplie en général quand les modules des quantités α, β, γ, σ^2 sont très-petits par rapport à a, b, c : ce qui a lieu, dans les corps transparents, quand les longueurs d'ondulation sont très-grandes par rapport aux intervalles moléculaires. Dans le cas contraire, les fonctions A, B, C doivent être considérées comme des fonctions transcendantes. Il y a lieu de supposer que cette circonstance peut se présenter, dans les corps solides, pour les ondes les plus courtes, c'est-à-dire pour les rayons chimiques, et dans les corps gazeux ou vapeurs, dont les intervalles moléculaires sont plus grands, pour les ondes lumineuses ou même pour les ondes obscures.

Dans ce cas, la propagation de la lumière peut donc s'effectuer suivant des lois toutes spéciales. Nous ne faisons qu'indiquer ici ces circonstances remarquables, nous bornant à observer que, dans tous les cas, on obtient une infinité d'intégrales particulières des équations à coefficients périodiques, en égalant les déplacements aux produits d'une même exponentielle $e^{\alpha x + \beta y + \gamma z + \sigma t}$ par des fonctions périodiques de x, y, z dont les coefficients sont des fonctions généralement transcendantes de α, β, γ, σ^2, ces derniers paramètres étant liés entre eux par une équation caractéristique généralement transcendante.

CHAPITRE II.

RÉDUCTION DES ÉQUATIONS DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES DE L'ÉTHER D'APRÈS LA SYMÉTRIE PROPRE AUX DIVERS SYSTÈMES CRISTALLINS.

1. Les corps cristallisés sont considérés comme composés de molécules polyédriques semblablement orientées, et dont les centres de gravité forment un *assemblage* de points distribués régulièrement. En admettant cette hypothèse, on est conduit à étudier les particularités qui résultent, au point de vue des phénomènes optiques, de la symétrie que peuvent présenter le polyèdre moléculaire et l'assemblage moléculaire.

2. M. Delafosse a signalé le premier le rôle important de la symétrie moléculaire dans les phénomènes cristallographiques, et spécialement dans celui qui est connu sous le nom d'*hémiédrie*. Dans une série de beaux Mémoires dont l'ensemble constitue une véritable cristallographie rationnelle, Bravais a montré comment les faits observés et les lois connues s'expliquaient par la symétrie moléculaire et la symétrie de l'assemblage. Il est indispensable de résumer brièvement ces remarquables travaux qui se rattachent intimement à l'étude des phénomènes optiques que présentent les cristaux.

3. Bravais a donné d'abord [*] une classification complète des polyèdres, au point de vue de leur symétrie.

Un polyèdre, ou plus généralement un système de points, peut présenter trois éléments de symétrie :

1° L'élément centre de symétrie;

2° L'élément axe de symétrie;

3° L'élément plan de symétrie.

Un point est centre de symétrie d'un système lorsque les points du système pris deux à deux sont rangés sur des diagonales dont ce point est le milieu.

Un *axe de symétrie* est une droite telle, qu'il suffit d'imprimer au

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, t. XIV.

système une certaine rotation autour de cette droite pour substituer les divers points les uns aux autres. Le rapport de la circonférence au plus petit des arcs mesurant la rotation est toujours un nombre entier qui mesure l'*ordre* de la symétrie de l'axe. Un axe est dit *principal* quand il est parallèle ou perpendiculaire à tous les axes ou plans de symétrie du système. Un système dénué d'axe principal est dit *sphéroédrique*.

Enfin, *un plan de symétrie* est un plan tel, que les points du système sont deux à deux à égales distances de ce plan sur des droites qui lui sont perpendiculaires.

L'existence de deux de ces trois sortes d'éléments entraîne l'existence de la troisième.

4. Les polyèdres peuvent être divisés en vingt-trois classes réparties entre six groupes distincts comprenant :

1° Les polyèdres asymétriques (ne possédant aucun élément de symétrie);

2° Les polyèdres symétriques, sans axes;

3° Les polyèdres symétriques ayant un axe principal d'ordre pair;

4° Les polyèdres symétriques ayant un axe principal d'ordre impair;

5° Les polyèdres sphéroédriques à quatre axes ternaires;

6° Les polyèdres sphéroédriques à dix axes ternaires.

5. Après avoir étudié les divers genres de symétrie que peuvent présenter les polyèdres moléculaires, Bravais a examiné la symétrie de l'assemblage, c'est-à-dire la symétrie d'un *système réticulaire* de points déterminés par l'intersection de trois systèmes de plans équidistants et parallèles [*].

Il a démontré d'abord que l'ordre de la symétrie d'un système réticulaire ne pouvait être qu'un des nombres 2, 3, 4, 6, de sorte que la symétrie d'un axe de l'assemblage est nécessairement binaire, ternaire, quaternaire ou sénaire. Cela posé, classant les assemblages d'après la nature et le nombre de leurs axes de symétrie, il les a divisés en sept groupes ou *systèmes* distincts.

---

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, XXXIIIe Cahier.

Pour rappeler avec concision la nature de la symétrie qui caractérise chaque système, nous emploierons la notation de Bravais. Dans cette notation :

La lettre C représente un centre de symétrie;

Les symboles Λ^2, L^2,... représentent des axes de symétrie binaires; Λ^3, L^3,... des axes de symétrie ternaires, et ainsi de suite;

La lettre Λ s'applique toujours à l'axe principal;

La lettre Π représente un plan de symétrie normal à l'axe principal;

La lettre P^2 un plan de symétrie normal à un axe binaire L^2;

La lettre P^3 un plan de symétrie normal à un axe ternaire L^3, et ainsi de suite.

Le nombre des axes d'un ordre est marqué par un coefficient précédant la lettre qui désigne un de ces axes : le nombre des plans de symétrie est marqué de la même manière.

Cela posé, la symétrie des sept systèmes est représentée par les notations du tableau ci-dessous.

NUMÉRO du système.	NOM de la symétrie.	SYMBOLE DE LA SYMÉTRIE.
1	Terquaternaire. . . .	$3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, C, $3P^4$, $6P^2$
2	Sénaire.	Λ^6, $6L^2$, C, Π, $6P^2$
3	Quaternaire.	Λ^4, $4L^2$, C, Π, $4P^2$
4	Ternaire.	Λ^3, $3L^2$, C, Π, $3P^2$
5	Terbinaire.	Λ^2, $2L^2$, C, Π, $2P^2$
6	Binaire.	Λ^2, C, Π
7	Asymétrique.	$0L$, C, 0Π

Dans un assemblage quelconque, chaque sommet étant un centre de symétrie, la lettre C se présente dans la notation de la symétrie de chaque système.

La notation même de la symétrie des six derniers systèmes rappelle immédiatement la situation relative des divers éléments de symétrie

qui les caractérisent. Ainsi, par exemple, pour le deuxième système, on voit que les six axes binaires sont dans le plan Π perpendiculaire à l'axe principal Λ et situés de manière que deux consécutifs de ces axes comprennent un angle de $\frac{360}{6} = 60$ degrés. Les six plans de symétrie sont perpendiculaires à ces six axes, et leur intersection est l'axe principal Λ.

Dans le premier système, les trois axes quaternaires, les quatre axes ternaires et les six axes binaires sont disposés comme le sont, dans un cube, les lignes joignant deux à deux : 1° les centres des faces opposées; 2° les sommets opposés; 3° les milieux des arêtes opposées.

6. Après ces études préliminaires, Bravais a examiné comment la symétrie d'une molécule peut être transmise, par la cristallisation, à l'assemblage moléculaire. Il a fait voir, à ce sujet, que l'équilibre doit s'établir plus facilement, dans un cristal qui se forme, si les centres de gravité des molécules se placent de manière que les axes et plans de symétrie de ces molécules, indéfiniment prolongés, deviennent des axes et plans de symétrie de l'assemblage moléculaire.

Il a admis, en conséquence, la règle suivante : Parmi les sept systèmes cristallins possibles, les molécules d'une substance donnée qui vient à cristalliser adoptent celui dont la symétrie offre le plus d'éléments communs avec la symétrie propre à leur polyèdre moléculaire.

Il a été conduit, en outre, à admettre que, dans le cas où plusieurs systèmes cristallins présenteraient les mêmes éléments de symétrie communs à leurs assemblages moléculaires et au polyèdre moléculaire donné, la cristallisation se fera suivant le système de moindre symétrie.

C'est d'après ces deux règles que Bravais a déterminé le système dans lequel doit cristalliser une substance dont le polyèdre moléculaire a une symétrie donnée.

7. On voit, d'après ce qui précède, que le polyèdre moléculaire d'une substance donnée et son assemblage cristallin possèdent en général des éléments de symétrie communs. Mais certains éléments de symétrie possibles dans un polyèdre sont impossibles dans un système réticulaire : par suite, ces éléments ne se transmettront pas de la molécule à l'assemblage moléculaire. Inversement, la coexistence de cer-

tains éléments de symétrie étant nécessaire dans un système réticulaire sans être nécessaire dans un polyèdre, on conçoit que le système cristallin d'une substance peut posséder certains éléments de symétrie absents dans la molécule.

A ce sujet, nous rappellerons quelques définitions données par Bravais.

Un cristal dans lequel le polyèdre moléculaire possède tous les éléments de symétrie de l'assemblage est dit *holoédrique*. Lorsque certains éléments de symétrie de l'assemblage manquent dans la molécule, le cristal est dit *mériédrique*.

Le polyèdre moléculaire est dit *holoaxe* lorsqu'il a tous les axes de symétrie de l'assemblage. Il est dit *hémiaxe* lorsque l'ordre de la symétrie de ses axes d'un certain ordre pair est moitié moindre que l'ordre de la symétrie des axes parallèles de l'assemblage. Il est dit *tétartoaxe* quand cette réduction à moitié a lieu pour tous les axes d'ordre pair ayant la même direction dans le polyèdre moléculaire et dans l'assemblage.

Tout polyèdre moléculaire qui ne possède ni centre ni plans de symétrie est dit *hémisymétrique*.

Tout polyèdre qui possède un centre de symétrie sera dit polyèdre *centré*.

Enfin, tout polyèdre dépourvu de centre, mais possédant un ou plusieurs plans de symétrie, est appelé *dichosymétrique*. Les mêmes désignations peuvent s'appliquer aux cristaux auxquels les polyèdres donnent naissance.

De là résulte la classification suivante des polyèdres moléculaires et des cristaux :

1° Holoaxes centrés ou holoédriques;
2° Holoaxes hémisymétriques;
3° Hémiaxes centrés;
4° Hémiaxes dichosymétriques;
5° Hémiaxes hémisymétriques;
6° Tétartoaxes centrés;
7° Tétartoaxes dichosymétriques;
8° Tétartoaxes hémisymétriques.

Bravais a montré comment les phénomènes cristallographiques

observés sur les cristaux doivent varier avec celle de ces huit catégories à laquelle appartient leur polyèdre moléculaire. En appliquant, en particulier, sa théorie à la détermination de la forme cristalline, c'est-à-dire du nombre des faces possibles dans un cristal, il a montré comment et suivant quelles lois, dans chaque système, l'absence, dans le polyèdre moléculaire, de certains éléments de symétrie de l'assemblage, entraînait une réduction du nombre des faces de manière à produire les phénomènes désignés par les cristallographes sous les noms de *hémiédrie* et *tétartoédrie*.

8. En résumé, les travaux dont nous venons de donner un aperçu établissent une relation entre la forme cristalline des diverses substances et la symétrie de leur molécule.

La forme cristalline se déduit théoriquement d'une symétrie moléculaire donnée et, inversement, la symétrie moléculaire d'une substance se déduit de sa forme cristalline observée.

Nous replaçant actuellement sur le terrain de l'optique théorique, nous sommes conduits à admettre une relation nécessaire entre la constitution que présente l'éther dans un cristal et la symétrie de sa molécule et de son assemblage. L'expression analytique de cette relation assigne aux équations des mouvements vibratoires une forme spéciale, variable avec la symétrie cristalline et à laquelle correspondent des phénomènes particuliers. On voit ainsi comment les deux théories, cristallographique et optique, établissent parallèlement une mutuelle dépendance entre les phénomènes lumineux que présentent les corps cristallisés et leur forme cristalline.

Le présent Chapitre de ce Mémoire est consacré à rechercher comment la forme des équations auxiliaires varie non-seulement avec le système cristallin, mais encore avec les différents cas de mériédrie qui peuvent se présenter dans chaque système.

Analyse.

9. L'analyse qui fait l'objet de ce Chapitre est fondée sur la remarque suivante.

La constitution de l'éther variant d'un point à un autre dans l'in-

térieur d'un cristal, d'après une loi qui dépend de l'action résultante exercée par la matière sur chacun de ses points, doit se reproduire la même partout où cette action est la même. Par suite, tout élément de symétrie des atomes matériels, c'est-à-dire tout élément de symétrie commun au polyèdre moléculaire du cristal et à son assemblage moléculaire, doit être considéré comme un élément de symétrie des atomes de l'éther.

Par suite, les équations des mouvements vibratoires des atomes de l'éther rapportés à un système d'axes S_1 ne doivent pas différer de celles que l'on obtient en rapportant les vibrations à un second système d'axes S_2 symétrique du premier par rapport à un centre ou plan de symétrie, commun au polyèdre et à l'assemblage moléculaires, ou obtenu en faisant tourner le premier de l'angle $\frac{2\pi}{n}$ autour d'un axe d'ordre n commun au polyèdre et à l'assemblage moléculaires.

Or cette transformation de coordonnées revient analytiquement à appliquer une substitution linéaire aux coordonnées x, y, z, et cette substitution doit transformer en elles-mêmes les équations auxiliaires auxquelles satisfont les vibrations moyennes de l'éther.

De cette condition dérive la forme particulière qui résulte, pour ces équations, de chacun des éléments de symétrie communs à la molécule et à l'assemblage.

10. *Lemme.* — On résout généralement ce problème en se fondant sur la proposition suivante :

Il existe généralement trois fonctions linéaires et homogènes de la forme $Ax + By + Cz$ qu'une substitution linéaire reproduit à un facteur constant près.

En effet, pour que la fonction

$$Ax + By + Cz$$

se reproduise multipliée par un certain facteur s, quand on y remplace x, y, z par

$$(1)\qquad \begin{cases} lx + my + nz, \\ l'x + m'y + n'z, \\ l''x + m''y + n''z, \end{cases}$$

il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} Al + Bl' + Cl'' = sA, \\ Am + Bm' + Cm'' = sB, \\ An + Bn' + Cn'' = sC; \end{array}\right.$$

or, ces trois équations déterminent s et des quantités proportionnelles à A, B, C; s est une des trois racines de l'équation

$$(3)\quad \begin{vmatrix} l-s, & l', & l'', \\ m, & m'-s, & m'' \\ n, & n', & n''-s \end{vmatrix} = 0,$$

et à ces trois racines correspondent trois systèmes de valeurs de A, B, C.

11. Cela posé, considérons les équations auxiliaires. En désignant, pour abréger, D_x, D_y, D_z, D_t par α, β, γ, σ, ces équations sont de la forme

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \sigma^2 u = F_1 u + F_2 v + F_3 w, \\ \sigma^2 v = G_1 u + G_2 v + G_3 w, \\ \sigma^2 w = H_1 u + H_2 v + H_3 w; \end{array}\right.$$

les F, G, H étant des fonctions entières à coefficients constants de α, β, γ. Supposons actuellement que l'on change la direction des axes de manière à substituer à x, y, z les expressions (1). Il est aisé de voir que, pour obtenir les transformées du système (3), il suffit d'y faire les substitutions suivantes :

$$(5)\quad \begin{pmatrix} u, & v, & w \\ lu + mv + nw, & l'u + m'v + n'w, & l''u + m''v + n''w \end{pmatrix},$$

$$(6)\quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma, \\ l\alpha + m\beta + n\gamma, & l'\alpha + m'\beta + n'\gamma, & l''\alpha + m''\beta + n''\gamma \end{pmatrix}.$$

Admettons qu'en opérant ainsi on reproduise identiquement le système (3).

12. Pour apercevoir plus aisément les conséquences de cette con-

dition, introduisons comme variables les trois fonctions linéaires de u, v, w que la substitution linéaire multiplie par s, s', s'' racines de l'équation (3). Soient u', v', w' ces fonctions, et α', β', γ' les fonctions analogues de α, β, γ.

Il est clair que le système (3) peut être remplacé par un système équivalent de la forme

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \sigma^2 u' &= f_1 u' + f_2 v' + f_3 w', \\ \sigma^2 v' &= g_1 u' + g_2 v' + g_3 w', \\ \sigma^2 w' &= h_1 u' + h_2 v' + h_3 w', \end{aligned} \right.$$

les f, g, h étant des fonctions entières de α', β', γ'. Cela posé, ce nouveau système se transforme par la substitution dans le suivant :

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} s\sigma^2 v' &= sf'_1\, u' + s'f'_2\, v' + s''f'_3\, w', \\ s'\sigma^2 v &= sg'_1\, u' + s'g'_2 v' + s''g'_3 w', \\ s''\sigma^2 w' &= sh'_1\, u' + s'h'_2 v' + s''h'_3 w', \end{aligned} \right.$$

où les f', g', h' représentent les transformées des f, g, h.

Pour que les systèmes (7) et (8) soient identiques, il faut que

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} f'_1 &= f_1, & s'f'_2 &= sf_2, & s''f'_3 &= sf_3, \\ sg'_1 &= s'g_1, & g'_2 &= g_2, & s''g'_3 &= s'g_3, \\ sh'_1 &= s''h_1, & s'h'_2 &= s''h_2, & h'_3 &= h_3. \end{aligned} \right.$$

Des conditions (9) résulte la forme nécessaire des f, g, h. Considérons en effet une de ces fonctions, f_2 par exemple, et soit $A\alpha'^p\beta'^q\gamma'^r$ un de ses termes; ce terme devient par la substitution $A\alpha'^p\beta'^q\gamma'^r s^p s'^q s''^r$ et la condition $s'f'_2 = sf_2$ exige que l'on ait $s^p s'^{q+1} s''^r = s$. Il ne devra donc entrer dans f_2 que des termes tels, que les exposants entiers p, q, r satisfassent à la relation ci-dessus. Si cette condition est réalisable avec la substitution donnée, on détermine ainsi la forme des f, g, h et par suite celle des équations (7), d'où on déduit enfin les équations (4).

Quand on passe d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires, l'équation (3) a pour racines l'unité et

deux imaginaires conjuguées à module égal à l'unité. On a donc

$$s = 1, \quad s' = e^{\varphi i}, \quad s'' e^{-\varphi i}.$$

La condition

$$s^p s'^{q+1} s''^r = s$$

devient alors

$$e^{(q+1-r)\varphi i} = 1 :$$

d'où on déduit

$$q + 1 - r = \frac{2j\pi}{\varphi},$$

j désignant un nombre entier quelconque.

La condition n'est donc réalisable que si l'argument φ est commensurable avec la circonférence 2π.

13. Après avoir exposé ainsi la méthode générale, cherchons la forme des équations auxiliaires quand le polyèdre et l'assemblage moléculaires ont en commun :

1° Un centre de symétrie ;
2° Un plan de symétrie ;
3° Un axe de symétrie.

1° Centre de symétrie.

14. Prenons un centre comme origine. Les équations ne sont pas altérées quand on change le sens des x, y, z positifs, c'est-à-dire quand on fait les substitutions

$$(10) \qquad \begin{pmatrix} u, & v, & w \\ -u, & -v, & -w \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ -\alpha, & -\beta, & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Donc les F, G, H ne doivent renfermer que des termes de degré pair par rapport à α, β, γ.

2° Plan de symétrie.

15. Prenons le plan de symétrie pour plan des yz. Les équations ne doivent pas être altérées quand on change le sens des x positifs, et par suite quand on y change le signe de u et α.

Donc F_1, G_2, G_3, H_2, H_3 sont des fonctions paires et F_2, F_3, G_1, H_1 des fonctions impaires de α.

3° *Axe de symétrie.*

16. Prenons l'axe de symétrie pour axe des x, et soit φ l'angle dont on peut déplacer solidairement dans leur plan les oy, oz sans altérer la forme des équations (4). Le changement d'axes entraîne la substitution

$$(11) \qquad \begin{pmatrix} u, & v, & w, \\ u, & v\cos\varphi - w\sin\varphi, & v\sin\varphi + w\cos\varphi \end{pmatrix},$$

de sorte que les coefficients de la substitution (5) sont

$$\begin{matrix} 1, & 0, & 0, \\ 0, & \cos\varphi, & -\sin\varphi, \\ 0, & \sin\varphi, & \cos\varphi; \end{matrix}$$

les racines de l'équation (3) sont

$$s = 1, \quad s' = e^{\varphi i}, \quad s'' = e^{-\varphi i},$$

et l'on a enfin

$$u' = u, \quad v' = v + wi, \quad w' = v - wi,$$
$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta + \gamma i, \quad \gamma' = \beta - \gamma i.$$

Par conséquent, les deux premières des équations (7) deviennent

$$(12) \qquad \begin{cases} \sigma^2 u = f_1 u + f_2(v + wi) + f_3(v - wi), \\ \sigma^2(v + wi) = g_1 u + g_2(v + wi) + g_3(v - wi), \end{cases}$$

les f, g, h désignant des fonctions entières, généralement imaginaires, de α, $\beta + \gamma i$, $\beta - \gamma i$. Il est inutile d'écrire la troisième équation, qui se déduit de la seconde en y changeant le signe de i.

Dans ce cas, les équations (9) deviennent

$$(13) \qquad \begin{cases} f'_1 = f_1, & f'_2 = e^{-\varphi i} f_2, & f'_3 = e^{\varphi i} f_3, \\ g'_1 = e^{\varphi i} g_1, & g'_2 = g_2, & g'_3 = e^{2\varphi i} g_3. \end{cases}$$

17. Il reste à déterminer la forme générale des fonctions qui satisfont à ces conditions. Soit $A\alpha^p(\beta+\gamma i)^q(\beta-\gamma i)^r$ le terme général d'une fonction que la substitution reproduit identiquement. La substitution multipliant ce terme par $e^{(q-r)\varphi i}$, on aura $e^{(q-r)\varphi i}=1$, et par suite $(q-r)\varphi=2j\pi$, j désignant un nombre entier quelconque. Il en résulte la condition

$$q-r=j\omega; \tag{14}$$

$\omega=\frac{2\pi}{\varphi}$ étant l'ordre de la symétrie; posons

$$q=q'+k\omega,$$
$$r=r'+l\omega,$$

k et l désignant des entiers positifs, et q' et r' des résidus positifs inférieurs à ω. La condition (14) entraînera évidemment la relation $r'=q'$, ce qui montre que le terme général peut être mis sous la forme

$$A\alpha^p(\beta^2+\gamma^2)^{q'}(\beta+\gamma i)^{k\omega}(\beta-\gamma i)^{l\omega}.$$

Si donc on pose

$$X+Yi=(\beta+\gamma i)^{\omega}, \tag{15}$$

on obtient le théorème suivant :

Toute fonction entière des variables α, β, γ se reproduisant identiquement, quand on applique à ces variables la substitution

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma\\ \alpha, & \beta\cos\varphi-\gamma\sin\varphi, & \beta\sin\varphi+\gamma\cos\varphi\end{pmatrix}, \tag{16}$$

est une fonction entière des quantités

$$\alpha,\quad \beta^2+\gamma^2,\quad X,\quad Y,$$

X et Y représentant les parties réelle et imaginaire de $(\beta+\gamma i)^{\omega}$, et ω désignant le rapport, supposé entier, de l'angle φ à la circonférence.

Nous appellerons *invariantes* les fonctions de cette forme jouissant de la propriété de ne pas être altérées par la substitution (16).

18. Supposons, en second lieu, que la fonction dont le terme général est $A\alpha^p(\beta+\gamma i)^q(\beta-\gamma i)^r$ soit multipliée, lorsqu'on lui applique la substitution (16), par le facteur $e^{n\varphi i}$, n désignant un nombre entier inférieur à ω. On a, dans ce cas, la condition

(17) $$q - r = j\omega + n,$$

et en posant, comme précédemment,

$$q = q' + k\omega,$$
$$r = r' + l\omega,$$

on voit que la différence $q' - (r' + n)$ doit être un multiple de ω. Or, q' et r' variant de 0 à $\omega - 1$, et n variant de 1 à $\omega - 1$, la différence dont il s'agit varie de $\omega - 2$ à $-(2\omega - 2)$. On doit donc avoir

$$q' - (r' + n) = 0, \quad \text{d'où} \quad q' = r' + n,$$

ou bien

$$q' - (r' + n) = -\omega, \quad \text{d'où} \quad r' = q' + \omega - n;$$

par suite, le terme général présente une des deux formes

$$A\alpha^p(\beta^2+\gamma^2)^{r'}(\beta+\gamma i)^{k\omega}(\beta-\gamma i)^{l\omega}(\beta+\gamma i)^n,$$
$$A\alpha^p(\beta^2+\gamma^2)^{q'}(\beta+\gamma i)^{k\omega}(\beta-\gamma i)^{l\omega}(\beta-\gamma i)^{\omega-n}.$$

On en déduit le théorème suivant :

Toute fonction entière de α, β, γ, que la substitution (16) multiplie par $e^{n\varphi i}$, n étant un nombre entier inférieur à ω, est de la forme

$$F(\beta+\gamma i)^n + G(\beta-\gamma i)^{\omega-n},$$

F et G désignant deux fonctions entières *invariantes* de α, β, γ.

On démontre de la même manière que toute fonction que la substi-

tution multiplie par $e^{-n\varphi i}$ est de la forme

$$F(\beta-\gamma i)^n + G(\beta+\gamma i)^{\omega-n}.$$

19. Si on pose actuellement

$$(18)\quad \begin{cases} X + Y i = (\beta+\gamma i)^{\omega}, \\ X_1 + Y_1 i = (\beta+\gamma i)^{\omega-1}, \\ X_2 + Y_2 i = (\beta+\gamma i)^{\omega-2}, \end{cases}$$

il résulte des formules (13) et des théorèmes précédemment démontrés :

1° Que les fonctions f_1 et g_2 sont des fonctions invariantes de α, β, γ. La fonction f_1 est réelle.

2° Que les fonctions f_2, f_3, g_1, g_3 sont de la forme

$$(19)\quad \begin{cases} f_2 = \psi\,(\beta-\gamma i) + \chi\,(X_1 + Y_1 i), \\ f_3 = \psi'\,(\beta+\gamma i) + \chi'\,(X_1 - Y_1 i), \\ g_1 = \psi''(\beta+\gamma i) + \chi''(X_1 - Y_1 i), \\ g_3 = \psi'''(\beta+\gamma i)^2 + \chi'''(X_2 - Y_2 i), \end{cases}$$

les ψ et χ désignant des fonctions entières invariantes de α, β, γ.

De plus, les fonctions f_2, f_3 étant évidemment conjuguées, il en est de même des fonctions ψ et ψ', et des fonctions χ et χ'.

Cela posé, écrivant $g_2 + G_2 i$ à la place de g_2, et désignant les fonctions

$$\psi,\quad \psi',\quad \psi'',\quad \psi''',$$
$$\chi,\quad \chi',\quad \chi'',\quad \chi''',$$

respectivement par

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{f_2 - f_3 i}{2}, & \dfrac{\varphi_2 - \varphi_3 i}{2}, \quad g_1 + G_1 i, \quad g_3 + G_3 i, \\ \dfrac{f_2 + f_3 i}{2}, & \dfrac{\varphi_2 + \varphi_3 i}{2}, \quad h_1 + H_1 i, \quad h_2 + H_3 i, \end{cases}$$

on parvient aisément à mettre les équations (12) sous la forme sui-

vante, qui est la forme la plus générale des équations auxiliaires dans un milieu cristallisé ayant un axe de symétrie d'ordre ω :

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
\sigma^2 u &= f_1 u + f_2(\beta v + \gamma w) + f_3(\beta w - \gamma v) \\
&\quad + \varphi_2(X_1 v - Y_1 w) + \varphi_3(X_1 w + Y_1 v), \\
\sigma^2 v &= g_2 v - G_2 w + (g_1\beta - G_1\gamma)u + (g_3\beta - G_3\gamma)(\beta v + \gamma w) \\
&\quad + (g_3\gamma + G_3\beta)(\beta w - \gamma v) \\
&\quad + (h_1 X_1 + H_1 Y_1)u + h_2(X_2 v - Y_2 w) + H_2(X_2 w + Y_2 v), \\
\sigma^2 w &= g_2 w + G_2 v + (g_1\gamma + G_1\beta)u + (g_3\gamma + G_3\beta)(\beta v + \gamma w) \\
&\quad - (g_3\beta - G_3\gamma)(\beta w - \gamma v) \\
&\quad + (H_1 X_1 - h_1 Y_1)u + H_2(X_2 v - Y_2 w) - h_2(X_2 w + Y_2 v),
\end{aligned}\right.$$

les fonctions f, φ, g, G, h, H étant des fonctions réelles de

$$\alpha, \quad \beta^2 + \gamma^2, \quad X, \quad Y,$$

et les X, Y ayant les valeurs fournies par les formules (18).

20. Nous passons actuellement à l'étude des équations particulières propres à chaque système cristallin et aux divers cas de mériédrie réalisés dans la nature.

1° *Système asymétrique.*

La seule réduction se présente quand la molécule est centrée. Dans ce cas, les termes d'ordre impair disparaissent dans les équations.

2° *Système binaire.*

Prenons l'axe de symétrie pour axe des x. Les équations (4) doivent rester inaltérées quand on y substitue $-v$, $-w$ à v, w, et $-\beta$, $-\gamma$ à β, γ. Il en résulte que F_1, G_2, G_3, H_2, H_3 ne doivent pas changer quand on y change le signe de β, γ, et F_2, F_3, G_1, H_1 doivent changer de signe par la même substitution. Les fonctions non altérées ne renferment que des termes d'ordre pair par rapport à β, γ, et les autres des termes d'ordre impair par rapport aux mêmes variables.

Dans le système binaire, on a deux cas à considérer :

1° *Holoaxie centrée* (Λ^2, C, P). — Les équations sont composées de termes d'ordre pair par rapport à α, β, γ.

2° *Holoaxie hémisymétrique* (Λ^2, o C, o P). — Les équations renferment des puissances paires et impaires de α.

3° *Symétrie terbinaire.*

21. 1° *Holoaxie hémisymétrique* (Λ^2, 2 L^2, o C, o P). — Les équations ne doivent pas être altérées quand on y change le signe des variables comprises dans un des trois groupes suivants :

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{llll} v, & w; & \beta, & \gamma, \\ w, & u; & \gamma, & \alpha, \\ u, & v; & \alpha, & \beta; \end{array}\right.$$

il est aisé d'en déduire la forme des F, G, H.

En effet, la fonction F_1 ne devant être altérée par aucune des trois substitutions doit être composée de termes $A\alpha^p\beta^q\gamma^r$ tels, que les sommes $q+r$, $r+p$, $p+q$ soient des nombres pairs. Donc p, q, r sont simultanément pairs ou impairs, suivant que la somme $p+q+r$ est paire ou impaire. Par suite, la fonction F_1 est de la forme

$$(23)\qquad F_1 = f_1 + \varphi_1\alpha\beta\gamma,$$

f_1 et φ_1 désignant des fonctions entières de α^2, β^2, γ^2.

La fonction F_2 change de signe par la première et la seconde substitution, et ne change pas par la troisième : par suite, $q+r$, $r+p$ sont impairs et $p+q$ pair. Il en résulte : 1° que si le degré $p+q+r$ du terme général est pair, p et q sont impairs et r pair; 2° si le degré $p+q+r$ est impair, p et q sont pairs et r est impair. On en conclut que la fonction F_2 est de la forme

$$(24)\qquad F_2 = f_2\alpha\beta + \varphi_2\gamma,$$

f_2 et φ_2 désignant des fonctions entières de α^2, β^2, γ^2.

On détermine de même les autres fonctions, et on obtient les équa-

tions auxiliaires sous la forme suivante :

$$(25)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f_1 u + f_2 \alpha\beta v + f_3\,\alpha\gamma w + \varphi_1\,\alpha\beta\gamma u + \varphi_2\gamma v + \varphi_3\beta w, \\ \sigma^2 v = g_1\,\alpha\beta u + g_2 v + g_3\,\beta\gamma w + \chi_1\gamma u + \chi_2\alpha\beta\gamma v + \chi_3\,\alpha w, \\ \sigma^2 w = h_1\,\alpha\gamma u + h_2\beta\gamma v + h_3 w + \psi_1\beta u + \psi_2\,\alpha v + \psi_3\alpha\beta\gamma w, \end{cases}$$

les f, g, h, φ, χ, ψ désignant des fonctions entières de α^2, β^2, γ^2.

22. 2° *Holoaxie centrée* [Λ^2, $2\,L^2$, C, Π, $2\,P$]. — Les termes d'ordre impair disparaissant, les équations sont

$$(26)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f_1 u + f_2\alpha\beta v + f_3\,\alpha\gamma w, \\ \sigma^2 v = g_1\,\beta\alpha u + g_2 v + g_3\beta\gamma w, \\ \sigma^2 w = h_1\,\gamma\alpha u + h_2\,\gamma\beta v + h_3 w. \end{cases}$$

23. 3° *Hémiaxie dichosymétrique* [Λ^2, $0\,L^2$, $0\,C$, $2\,P$]. — Prenons l'axe de symétrie Λ^2 pour axe des x, les axes des y et z étant respectivement perpendiculaires aux deux plans de symétrie. Les équations (4) ne doivent pas être altérées quand on y change le signe de v, β, ou bien de w, γ.

On voit, par suite, que F_1 est une fonction paire de β et de γ, réductible à la forme

$$(27)\qquad F_1 = f_1 + \varphi_1\,\alpha,$$

f_1 et φ_1 étant fonctions de α^2, β^2, γ^2.

F_2 est une fonction impaire de β et paire de γ, réductible à la forme

$$(28)\qquad F_2 = f_2\,\alpha\beta + \varphi_2\beta,$$

f_2 et φ_2 étant également fonctions de α^2, β^2, γ^2.

Les équations auxiliaires sont les suivantes :

$$(29)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f_1 u + f_2\,\alpha\beta v + f_3\,\alpha\gamma w + \varphi_1\,\alpha u + \varphi_2\beta v + \varphi_3\gamma w, \\ \sigma^2 v = g_1\,\beta\alpha u + g_2 v + g_3\beta\gamma w + \chi_1\beta u + \chi_2\alpha v + \chi_3\alpha\beta\gamma w, \\ \sigma^2 w = h_1\,\gamma\alpha u + h_2\,\gamma\beta v + h_3 w + \psi_1\gamma u + \psi_2\alpha\beta\gamma v + \psi_3\alpha w, \end{cases}$$

les f, g, h, φ, χ, ψ désignant des fonctions entières de α^2, β^2, γ^2.

4° Symétries ternaire, quaternaire et sénaire.

24. Les équations relatives à ces trois systèmes sont comprises dans les équations (21) et diffèrent, quand on passe d'un système à l'autre, par les valeurs des six quantités X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 qui ont, dans les trois genres de symétrie, les valeurs comprises dans le tableau suivant.

	SYMÉTRIE ternaire.	SYMÉTRIE quaternaire.	SYMÉTRIE sénaire.
X	$\beta^3 - 3\beta\gamma^2$	$(\beta^2 + \gamma^2)^2$	$\beta^6 - 15\beta^4\gamma^2 + 15\beta^2\gamma^4 - \gamma^6$
Y	$3\beta^2\gamma - \gamma^3$	$4\beta\gamma(\beta^2 - \gamma^2)$	$6\beta^5\gamma - 20\beta^3\gamma^3 + 6\beta\gamma^5$
X_1	$\beta^2 - \gamma^2$	$\beta^3 - 3\beta\gamma^2$	$\beta^5 - 10\beta^3\gamma^2 + 5\beta\gamma^4$
Y_1	$2\beta\gamma$	$3\beta^2\gamma - \gamma^3$	$5\beta^4\gamma - 10\beta^2\gamma^3 + \gamma^5$
X_2	β	$\beta^2 - \gamma^2$	$\beta^4 - 6\beta^2\gamma^2 + \gamma^4$
Y_2	γ	$2\beta\gamma$	$4\beta\gamma(\beta^2 - \gamma^2)$

En substituant, pour chacun des trois systèmes cristallins, les valeurs des six quantités données par ce tableau, on obtient les équations générales propres à représenter les vibrations de la lumière dans un cristal de ce système.

Nous examinerons actuellement ce que deviennent ces équations quand le cristal présente :

1° L'holoaxie hémisymétrique;
2° L'holoaxie centrée;
3° L'hémiaxie dichosymétrique;
4° L'hémiaxie hémisymétrique.

25. *Holoaxie hémisymétrique.* — Dans ce cas, le polyèdre moléculaire et l'assemblage présentent trois, quatre ou six axes de symétrie dirigés dans un plan perpendiculaire à l'axe principal de symétrie. Prenant un de ces axes pour axe des y, on voit que les équations (21)

ne doivent pas être altérées quand, sans changer l'axe des y positifs, on substitue aux axes positifs des x et des z leurs prolongements.

Ce changement de coordonnées entraîne les substitutions suivantes :

$$\begin{pmatrix} u, & v, & w \\ -u, & v, & -w \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ -\alpha, & \beta, & -\gamma \end{pmatrix}.$$

On voit d'ailleurs que ces substitutions ne changent pas X, X_1, X_2 et changent le signe de Y, Y_1, Y_2. En effet, en changeant le signe de γ, l'expression

$$(\beta + \gamma i)^m = X_m + Y_m i$$

devient

$$(\beta - \gamma i)^m = X_m - Y_m i.$$

Cela posé, on voit aisément que, pour que les substitutions dont il s'agit n'altèrent pas le système des équations (21), il faut que, par la substitution de $-\alpha$, $-$Y à α, Y :

1° Les fonctions

$$f_1, \; f_3, \; \varphi_3, \; G_1, \; g_2, \; g_3, \; H_1, \; H_2$$

ne changent pas de valeur;

2° Les fonctions

$$f_2, \; \varphi_2, \; g_1, \; G_2, \; G_3, \; h_1, \; H_2$$

changent de signe.

D'ailleurs, toute fonction entière de α, Y qui change de signe quand on y change le signe de ces variables, est de la forme

$$f\alpha + f'Y,$$

et toute fonction ne changeant pas, par la même substitution, est de la forme

$$f + f'\alpha Y,$$

f et f' désignant des fonctions entières de α^2, Y^2.

On en déduit définitivement que le système des équations (21) peut, dans le cas que nous considérons, s'écrire de la manière suivante :

$$
(30)\quad \left\{
\begin{aligned}
\sigma^2 u = {} & f_1 u + f_2 \alpha(\beta v + \gamma w) + f_3(\beta w - \gamma v) \\
& + \mathrm{Y}[f'_1 \alpha u + f'_2(\beta v + \gamma w) + f'_3 \alpha(\beta w - \gamma v)] \\
& + \varphi_2 \alpha(\mathrm{X}_1 v - \mathrm{Y}_1 w) + \varphi_3(\mathrm{X}_1 w + \mathrm{Y}_1 v) \\
& + \mathrm{Y}[\varphi'_2(\mathrm{X}_1 v - \mathrm{Y}_1 w) + \varphi'_3 \alpha(\mathrm{X}_1 w + \mathrm{Y}_1 v)], \\
\sigma^2 v = {} & g_2 v - \mathrm{G}_2 \alpha w + (g_1 \alpha\beta - \mathrm{G}_1 \gamma) u \\
& + (g_3 \beta - \mathrm{G}_3 \alpha\gamma)(\beta v + \gamma w) + (g_3 \gamma + \mathrm{G}_3 \alpha\beta)(\beta w - \gamma v) \\
& + \mathrm{Y}[g'_2 \alpha v - \mathrm{G}'_2 w + (g'_1 \beta - \mathrm{G}'_1 \alpha\gamma) u \\
& \qquad + (g'_3 \alpha\beta - \mathrm{G}'_3 \gamma)(\beta v + \gamma w) + (g'_3 \alpha\gamma + \mathrm{G}'_3 \beta)(\beta w - \gamma v)] \\
& + (h_1 \alpha \mathrm{X}_1 + \mathrm{H}_1 \mathrm{Y}_1) u + h_2(\mathrm{X}_2 v - \mathrm{Y}_2 w) + \mathrm{H}_2 \alpha(\mathrm{X}_2 w + \mathrm{Y}_2 v) \\
& + \mathrm{Y}[(h'_1 \mathrm{X}_1 + \mathrm{H}'_1 \alpha \mathrm{Y}_1) u \\
& \qquad + h'_2 \alpha(\mathrm{X}_2 v - \mathrm{Y}_2 w) + \mathrm{H}'_2(\mathrm{X}_2 w + \mathrm{Y}_2 v)], \\
\sigma^2 w = {} & g_2 w + \mathrm{G}_2 \alpha v + (g_1 \alpha\gamma + \mathrm{G}_1 \beta) u \\
& + (g_3 \gamma + \mathrm{G}_3 \alpha\beta)(\beta v + \gamma w) - (g_3 \beta - \mathrm{G}_3 \alpha\gamma)(\beta w - \gamma v) \\
& + \mathrm{Y}[g'_2 \alpha w + \mathrm{G}'_2 \alpha v + (g'_1 \gamma + \mathrm{G}'_1 \alpha\beta) u \\
& \qquad + (g'_3 \alpha\gamma + \mathrm{G}'_3 \beta)(\beta v + \gamma w) - (g'_3 \alpha\beta - \mathrm{G}'_3 \gamma)(\beta w - \gamma v)] \\
& + (\mathrm{H}_1 \mathrm{X}_1 - h_1 \alpha \mathrm{Y}_1) u + \mathrm{H}_2 \alpha(\mathrm{X}_2 v - \mathrm{Y}_2 w) - h_2(\mathrm{X}_2 w + \mathrm{Y}_2 v) \\
& + \mathrm{Y}[(\mathrm{H}'_1 \alpha \mathrm{X}_1 - h'_1 \mathrm{Y}_1) u \\
& \qquad + \mathrm{H}'_2(\mathrm{X}_2 v - \mathrm{Y}_2 w) - h'_2 \alpha(\mathrm{X}_2 w + \mathrm{Y}_2 v)],
\end{aligned}
\right.
$$

les fonctions indéterminées qui entrent dans ces équations étant des fonctions entières de

$$\alpha^2,\ \beta^2 + \gamma^2,\ \mathrm{X},\ \mathrm{Y}^2.$$

26. *Holoaxie centrée.* — Les équations s'obtiennent en supprimant dans les précédentes les termes de degré impair par rapport à α, β, γ.

27. *Hémiaxie dichosymétrique.* — Supposons que le polyèdre moléculaire soit dénué de centre et possède, en commun avec l'assemblage, plusieurs plans de symétrie passant par l'axe principal ox. Si

l'on prend un de ces plans pour plan des xy, on voit que les équations (21) ne doivent pas être altérées quand on y change w en $-w$ et γ en $-\gamma$, ce qui substitue $-Y$, $-Y_1$, $-Y_2$ à Y, Y_1, Y_2.

On en déduit aisément que les fonctions

$$f_1,\ f_2,\ \varphi_2,\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ h_1,\ h_2$$

ne changent pas et que les fonctions

$$f_3,\ \varphi_3,\ G_1,\ G_2,\ G_3,\ H_1,\ H_2$$

changent de signe quand on y change le signe de Y.

Les premières sont donc des fonctions de Y^2, et les autres sont égales au produit de Y par des fonctions de Y^2. On parvient ainsi à mettre les équations (21) sous la forme :

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned}
\sigma^2 u &= f_1 u + f_2(\beta v + \gamma w) + f_3 Y(\beta w - \gamma v)\\
&\quad + \varphi_2(X_1 v - Y_1 w) + \varphi_3 Y(X_1 w + Y_1 v),\\
\sigma^2 v &= g_2 v - G_2 Y w + (g_1\beta - G_1 Y\gamma)u + (g_3\beta - G_3 Y\gamma)(\beta v + \gamma w)\\
&\quad + (g_3\gamma + G_3 Y\beta)(\beta w - \gamma v) + (h_1 X_1 + H_1 Y Y_1)u\\
&\quad + h_2(X_2 v - Y_2 w) + H_2 Y(X_2 w + Y_2 v),\\
\sigma^2 w &= g_2 w + G_2 Y v + (g_1\gamma + G_1 Y\beta)u + (g_3\gamma + G_3 Y\beta)(\beta v + \gamma w)\\
&\quad - (g_3\beta - G_3 Y\gamma)(\beta w - \gamma v) + (H_1 Y X_1 - h_1 Y_1)u\\
&\quad + H_2 Y(X_2 v - Y_2 w) - h_2(X_2 w + Y_2 v),
\end{aligned}\right.$$

les fonctions renfermées dans ces équations dépendant de α, $\beta^2 + \gamma^2$, X, Y^2.

28. *Hémiaxie hémisymétrique*. — L'hémiaxie peut avoir lieu, soit par la suppression des axes binaires, soit par la réduction à moitié de l'ordre de l'axe principal.

Dans le premier cas, les équations auxiliaires sont les équations (21). Dans le second cas, elles coïncident avec celles qui correspondent à l'holoaxie du système caractérisé par un axe principal d'un ordre moitié moindre que celui que présente le système cristallin considéré.

Enfin, en supprimant les termes d'ordre impair dans les équations de l'hémiaxie hémisymétrique, on obtient les équations de l'*hémiaxie centrée*.

5° *Symétrie terquaternaire.*

29. On a, dans ce système, cinq cas à considérer :

1° Holoaxie hémisymétrique. . [$3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, oC, oP];
2° Holoaxie centrée . . . . . . [$3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, C, $3P^4$, $6P^2$];
3° Hémiaxie hémisymétrique. . [$3L^2$, $4L^3$, oC, oP];
4° Hémiaxie dichosymétrique. . [$3L^2$, $4L^3$, oC, $6P$];
5° Hémiaxie centrée . . . . . . [$3L^2$, $4L^3$, C, $3P^2$].

Nous allons examiner la forme des équations auxiliaires dans chacun de ces cas particuliers.

Observant d'abord que, dans chacun de ces cas, le polyèdre moléculaire et l'assemblage possèdent quatre axes ternaires, nous allons déterminer les conséquences qui résultent de l'existence de ces axes. Ces quatre axes sont dirigés, comme on l'a remarqué au n° 5, suivant les lignes qui dans un cube joignent les sommets opposés.

Nous prendrons pour axes de coordonnées les arêtes du cube dont les grandes diagonales sont parallèles aux quatre axes ternaires. Ces axes sont dirigés suivant les trois axes quaternaires de l'assemblage.

30. Considérons d'abord l'axe ternaire compris dans le trièdre déterminé par les parties positives des axes de coordonnées, et supposons que l'on fasse tourner le système de ces axes de 120 degrés autour de l'axe ternaire. Les équations (4) ne doivent pas être altérées par la substitution.

Or, cette rotation permute circulairement les directions des axes, de sorte que les nouveaux axes des x, y, z coïncident avec les anciens des y, z, x, si la rotation s'effectue dans un sens, et avec les anciens axes des z, x, y si elle s'effectue en sens inverse.

On a donc les deux substitutions

$$(32)\qquad \begin{pmatrix} u, & v, & w \\ v, & w, & u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \beta, & \gamma, & \alpha \end{pmatrix};$$

$$(33)\qquad \begin{pmatrix} u, & v, & w \\ w, & u, & v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \gamma, & \alpha, & \beta \end{pmatrix},$$

qui ne doivent pas altérer les équations (4).

Désignons par un ou deux accents les transformées des F, G, H par les substitutions (32) ou (33). Ces substitutions transforment évidemment la première équation (4) dans les suivantes :

$$\sigma^2 v = F'_3 u + F'_1 v + F'_2 w,$$
$$\sigma^2 w = F''_2 u + F''_3 v + F''_1 w.$$

Donc, par suite de l'existence de l'axe ternaire, le système des équations (4) doit être de la forme

$$(34)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = F_1 u + F_2 v + F_3 w, \\ \sigma^2 v = F'_3 u + F'_1 v + F'_2 w, \\ \sigma^2 w = F''_2 u + F''_3 v + F''_1 w. \end{cases}$$

31. Considérons maintenant l'axe ternaire également incliné sur les parties positives des axes ox, oz et sur la partie négative de oy.

Dans ce cas, le système des équations (4) ne doit pas être altéré par la substitution

$$(35)\quad \begin{pmatrix} u, & v, & w \\ -v, & -w, & u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ -\beta, & -\gamma, & \alpha \end{pmatrix}.$$

Or, le même système étant inaltéré par la substitution (32) devra l'être par la suivante :

$$\begin{pmatrix} u, & v, & w \\ -u, & -v, & w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ -\alpha, & -\beta, & \gamma \end{pmatrix}.$$

Par conséquent l'axe des z est un axe de symétrie binaire.

Ainsi, l'existence des deux axes de symétrie ternaires entraîne l'existence d'un axe de symétrie binaire, et inversement l'existence de cet axe binaire et d'un des axes ternaires entraîne l'existence du second axe ternaire.

On en conclut immédiatement que, avec les quatre axes ternaires disposés comme les quatre grandes diagonales d'un cube, existent nécessairement trois axes binaires dirigés suivant les arêtes de ce cube ; et

inversement, les trois axes binaires et un des axes ternaires entraînent les trois autres axes ternaires.

32. *Hémiaxie hémisymétrique* ($3L^2$, $4L^3$, o C, o P).

Cela posé, pour obtenir les équations auxiliaires de l'hémiaxie hémisymétrique, il suffira de prendre comme point de départ les équations de l'holoaxie hémisymétrique du système terbinaire (25), et d'y introduire les conditions établies au n° **30**. On obtient ainsi le système suivant :

$$(36)\begin{cases} \sigma^2 u = f_1 u + f_2 \alpha\beta v + f_3 \alpha\gamma w + \varphi_1 \alpha\beta\gamma u + \varphi_2 \gamma v + \varphi_3 \beta w, \\ \sigma^2 v = f'_3 \beta\alpha u + f'_1 v + f'_2 \beta\gamma w + \varphi'_3 \gamma u + \varphi'_1 \alpha\beta\gamma v + \varphi'_2 \alpha w, \\ \sigma^2 w = f''_2 \alpha\gamma u + f''_3 \gamma\beta v + f''_1 w + \varphi''_2 \beta u + \varphi''_3 \alpha v + \varphi''_1 \alpha\beta\gamma w, \end{cases}$$

où on dénote toujours par un ou deux accents ce que deviennent les fonctions de la première équation par les substitutions

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \beta, & \gamma, & \alpha \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \gamma, & \alpha, & \beta \end{pmatrix}.$$

Nous rappelons que ces fonctions sont des fonctions entières de α^2, β^2, γ^2.

33. *Hémiaxie dichosymétrique* ($3L^2$, $4L^3$, o C, 6 P).

Le système cristallisé présente, dans le cas actuel, six plans de symétrie, partageant en deux parties égales les dièdres que forment deux à deux les plans coordonnés. Les axes de symétrie sont les mêmes que dans le cas précédent. Les équations sont donc comprises dans le système (36) : exprimons en outre la condition qu'entraîne le plan de symétrie bissecteur du dièdre droit compris entre les plans *xoz*, *yoz*.

Il est clair que, si l'on donne aux axes *oy*, *oz* des positions symétriques par rapport à ce plan de celles qu'ils occupent effectivement, on permute ces deux axes, de sorte qu'au changement d'axes dont il s'agit correspond la substitution

$$\begin{pmatrix} u, & v, & w \\ u, & w, & v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha, & \gamma, & \beta \end{pmatrix},$$

et cette substitution doit transformer en elles-mêmes les équations (36). On en conclut aisément que :

1° Les fonctions f_1, φ_1 sont des fonctions symétriques de β^2, γ^2, c'est-à-dire des fonctions de $\beta^2+\gamma^2$ et $\beta^2\gamma^2$.

2° L'on a les relations identiques

$$f_3(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = f_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2),$$
$$\varphi_3(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = \varphi_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2).$$

Par conséquent les équations sont nécessairement de la forme

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned}
\sigma^2 u &= f_1(\alpha^2, \beta^2+\gamma^2, \beta^2\gamma^2)u + f_2(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)\beta\gamma v \\
&\quad + f_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2)\alpha\gamma w + \varphi_1(\alpha^2, \beta^2+\gamma^2, \beta^2\gamma^2)\alpha\beta\gamma u \\
&\quad + \varphi_2(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)\gamma v + \varphi_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2)\beta w, \\
\sigma^2 v &= f_2(\beta^2, \alpha^2, \gamma^2)\beta\alpha u + f_1(\beta^2, \alpha^2+\gamma^2, \alpha^2\gamma^2)v \\
&\quad + f_2(\beta^2, \gamma^2, \alpha^2)\beta\gamma w + \varphi_2(\beta^2, \alpha^2, \gamma^2)\gamma u \\
&\quad + \varphi_1(\beta^2, \alpha^2+\gamma^2, \alpha^2\gamma^2)\alpha\beta\gamma v + \varphi_2(\beta^2, \gamma^2, \alpha^2)\alpha w, \\
\sigma^2 w &= f_2(\gamma^2, \alpha^2, \beta^2)\alpha\gamma u + f_2(\gamma^2, \beta^2, \alpha^2)\beta\gamma v \\
&\quad + f_1(\gamma^2, \alpha^2+\beta^2, \alpha^2\beta^2)w + \varphi_2(\gamma^2, \alpha^2, \beta^2)\beta u \\
&\quad + \varphi_2(\gamma^2, \beta^2, \alpha^2)\alpha v + \varphi_1(\gamma^2, \alpha^2+\beta^2, \alpha^2\beta^2)\alpha\beta\gamma w.
\end{aligned}\right.$$

Il est d'ailleurs facile de voir que ces équations jouissent des propriétés analytiques qui correspondent aux six plans de symétrie que possède le système. De sorte que les équations (37) constituent les équations générales relatives à l'hémiaxie dichosymétrique du système terquaternaire.

34. *Hémiaxie centrée.* — Les équations sont les équations (36), moins les termes d'ordre impair, c'est-à-dire les suivantes :

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned}
\sigma^2 u &= f_1 u + f_2\alpha\beta v + f_3\alpha\gamma . w, \\
\sigma^2 v &= f'_3\beta\alpha u + f'_1 v + f'_2\beta\gamma . w, \\
\sigma^2 w &= f''_2\gamma\alpha . u + f''_3\gamma\beta v + f''_1 . w.
\end{aligned}\right.$$

35. *Holoaxie hémisymétrique* ($3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, $o C$, $o P$).

Il est clair que les équations qu'il s'agit d'obtenir sont comprises

dans les formules (36). Il suffit d'exprimer dans celles-ci que le système possède un axe quaternaire ; en effet, l'existence des axes ternaires entraîne l'existence des deux autres axes quaternaires.

D'ailleurs, on sait que les axes binaires sont une conséquence nécessaire des axes ternaires et quaternaires.

Il suffit donc d'exprimer que l'axe des x est un axe quaternaire.

Par suite, les équations ne doivent pas être altérées, si on fait tourner solidairement les axes oy et oz de 90 degrés dans leur plan. Or, ce changement d'axes introduit la substitution

$$\begin{pmatrix} u, & v, & w \\ u, & -w, & v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha, & -\gamma, & \beta \end{pmatrix}.$$

Cette substitution ne devant pas altérer les équations (36), on voit que :

1° La fonction f_1 est une fonction symétrique de β^2 et γ^2.

2° La fonction φ_1 est une fonction alternée des mêmes variables, et est par conséquent égale au produit de $\beta^2 - \gamma^2$ par une fonction symétrique de β^2, γ^2.

3° L'on a enfin les relations

$$f_3(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = f_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2),$$
$$\varphi_3(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = -\varphi_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2).$$

On obtient ainsi le système des équations auxiliaires sous la forme :

$$(39)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f_1(\alpha^2, \beta^2+\gamma^2, \beta^2\gamma^2)\,u + f_2(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)\,\alpha\beta v \\ \qquad + f_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2)\,\alpha\gamma w + \varphi_1(\alpha^2, \beta^2+\gamma^2, \beta^2\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)\,\alpha\beta\gamma u \\ \qquad + \varphi_2(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)\,\gamma v - \varphi_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2)\,\beta w, \\ \sigma^2 v = f_2(\beta^2, \alpha^2, \gamma^2)\,\beta\alpha u + f_1(\beta^2, \gamma^2+\alpha^2, \gamma^2\alpha^2)\,v \\ \qquad + f_2(\beta^2, \gamma^2, \alpha^2)\,\beta\gamma w - \varphi_2(\beta^2, \alpha^2, \gamma^2)\,\gamma u \\ \qquad + \varphi_1(\beta^2, \gamma+\alpha^2, \gamma^2\alpha^2)(\gamma^2-\alpha^2)\,\alpha\beta\gamma v + \varphi_2(\beta^2, \gamma^2, \alpha^2)\,\alpha w, \\ \sigma^2 w = f_2(\gamma^2, \alpha^2, \beta^2)\,\gamma\alpha u + f_2(\gamma^2, \beta^2, \alpha^2)\,\gamma\beta v \\ \qquad + f_1(\gamma^2, \alpha^2+\beta^2, \alpha^2\beta^2)\,w + \varphi_2(\gamma^2, \alpha^2, \beta^2)\,\beta u \\ \qquad - \varphi_2(\gamma^2, \beta^2, \alpha^2)\,\alpha v + \varphi_1(\gamma^2, \alpha^2+\beta^2, \alpha^2\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)\,\alpha\beta\gamma w \end{cases}$$

36. *Holoaxie centrée* ($3L^4, 4L^3, 6L^2, C, 3P^4, 6P^2$).

Les équations se déduisent des précédentes par la suppression des termes d'ordre impair

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma^2 u &= f_1(\alpha^2, \beta^2+\gamma^2, \beta^2\gamma^2)u + f_2(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)\alpha\beta v \\ &\quad + f_2(\alpha^2, \gamma^2, \beta^2)\alpha\gamma w, \\ \sigma^2 v &= f_2(\beta^2, \alpha^2, \gamma^2)\beta\alpha u + f_1(\beta^2, \gamma^2+\alpha^2, \gamma^2\alpha^2)v \\ &\quad + f_2(\beta^2, \gamma^2, \alpha^2)\beta\gamma w, \\ \sigma^2 w &= f_2(\gamma^2, \alpha^2, \beta^2)\gamma\alpha u + f_2(\gamma^2, \beta^2, \alpha^2)\gamma\beta v \\ &\quad + f_1(\gamma^2, \alpha^2+\beta^2, \alpha^2\beta^2)w. \end{aligned}\right.$$

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

A Monsieur Hermite

Hommage respectueux

E. Sarrau

SUR LA

PROPAGATION ET LA POLARISATION DE LA LUMIÈRE DANS LES CRISTAUX;

PAR M. ÉMILE SARRAU,
Ingénieur des Manufactures de l'État.

SECOND MÉMOIRE.

Nous avons montré, dans un premier Mémoire inséré dans ce Journal, comment l'étude analytique des phénomènes lumineux dépend de trois fonctions symboliques à coefficients périodiques dont il importe de déterminer la forme essentielle pour réduire les équations auxiliaires. Ces fonctions, désignées par F, G, H dans le Mémoire précité, représentent les composantes de la force accélératrice appliquée à un point quelconque de l'éther : leur expression dépend nécessairement des idées admises sur la constitution de l'éther, et ce second Mémoire a pour objet l'examen des résultats qu'introduit une hypothèse particulière dont les conséquences paraissent conformes aux faits observés.

Cette hypothèse est développée dans les Chapitres II et III. Elle revient à supposer que, dans les milieux matériels comme dans le vide, l'éther est *isotrope* et que la seule modification introduite par l'action de la matière pondérable consiste dans une altération périodique de la densité.

Les Chapitres IV et V sont consacrés à l'étude des propriétés des ondes planes propagées par les cristaux des divers systèmes déduites des équations obtenues dans les Chapitres précédents.

Nous avons cru utile de rappeler brièvement dans le premier Chapitre la méthode générale qui a été appliquée par Cauchy à l'étude des mouvements simples, afin de fixer les notations qui sont constam-

ment employées dans ce travail. Nous indiquons à cette occasion une règle fort simple pour déterminer les éléments d'une vibration elliptique.

CHAPITRE PREMIER.

RAPPEL DES PROPRIÉTÉS DES ONDES PLANES. — DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS D'UNE ONDE POLARISÉE ELLIPTIQUEMENT.

1. Soit en général un système d'équations auxiliaires de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} D_t^2 u = L_1 u + L_2 v + L_3 w, \\ D_t^2 v = M_1 u + M_2 v + M_3 w, \\ D_t^2 w = N_1 u + N_2 v + N_3 w, \end{cases}$$

les L, M, N étant des fonctions symboliques entières, à coefficients constants, de D_x, D_y, D_z ; on a un système d'intégrales particulières, en posant

$$(2)\qquad \frac{u}{P} = \frac{v}{Q} = \frac{w}{R} = e^{\alpha x + \beta y + \gamma z - \sigma t},$$

P, Q, R ; α, β, γ, σ étant des constantes, réelles ou imaginaires, satisfaisant aux équations

$$(3)\qquad \begin{cases} \sigma^2 P = A_1 P + A_2 Q + A_3 R, \\ \sigma^2 Q = B_1 P + B_2 Q + B_3 R, \\ \sigma^2 R = C_1 P + C_2 Q + C_3 R, \end{cases}$$

où les A, B, C représentent les résultats obtenus en écrivant α, β, γ au lieu de D_x, D_y, D_z dans les L, M, N des équations (1). En éliminant P, Q, R entre les équations (3) on a une équation *caractéristique*

$$(4)\qquad F(\alpha, \beta, \gamma, \sigma) = 0.$$

Enfin, on déduit des mêmes équations les rapports de deux des constantes P, Q, R à la troisième.

2. On sait que tout système d'intrégales des équations (1) s'obtient

en combinant par addition un nombre fini ou infini d'intégrales *simples* de la forme (1). Il est aisé d'en conclure que tout mouvement du système peut être considéré comme résultant de la composition d'un nombre fini ou infini de mouvements dans lesquels les déplacements sont les parties réelles d'un système d'intégrales simples. De la seule considération de ces mouvements *simples,* on peut déduire, comme l'a fait Cauchy, les propriétés générales des vibrations.

3. Supposons les coordonnées rectangulaires, et soit généralement

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha = a' + ai, \quad \beta = b' + bi, \quad \gamma = c' + ci, \quad \sigma = s' + si, \\ \mathrm{P} = pe^{\lambda i}, \quad \mathrm{Q} = qe^{\mu i}, \quad \mathrm{R} = re^{\nu i}. \end{cases}$$

Désignons de plus par ρ et ρ' les distances du point x, y, z aux plans ayant pour équations

$$(6)\qquad a\mathrm{X} + b\mathrm{Y} + c\mathrm{Z} = 0,$$

$$(7)\qquad a'\mathrm{X} + b'\mathrm{Y} + c'\mathrm{Z} = 0,$$

il est aisé de voir que les déplacements du mouvement simple correspondant aux intégrales (2) sont

$$(8)\quad \begin{cases} \overline{u} = pe^{h'\rho' - s't}\cos(h\rho - st + \lambda), \\ \overline{v} = qe^{h'\rho' - s't}\cos(h\rho - st + \mu), \\ \overline{w} = re^{h'\rho' - s't}\cos(h\rho - st + \nu), \end{cases}$$

h et h' étant déterminés par les formules

$$(9)\qquad h^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad h'^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

Les formules (8) représentent un mouvement par *ondes planes* parallèles au plan fixe (6). Les valeurs absolues de $\frac{2\pi}{h}$ et $\frac{2\pi}{s}$ donnent la *longueur d'ondulation* et la *durée de la vibration*. La *vitesse de propagation* des ondes planes est fournie par le rapport $\omega = \frac{s}{h}$. Les quantités h' et s' sont des *coefficients d'extinction*. Quand h' n'est pas nul, l'am-

plitude des déplacements décroît en progression géométrique quand on s'éloigne d'un certain côté du plan représenté par l'équation (7). Quand s' est positif, le mouvement s'éteint pour des valeurs croissantes du temps; si $s' = 0$, l'amplitude est constante en chaque point et le mouvement est dit *persistant*.

4. Nous ne considérons dans ce qui suit que des mouvements simples persistants : dans ce cas, on déduit aisément des formules (8) les deux équations

$$(10) \qquad \frac{\overline{u}}{p}\sin(\mu - \nu) + \frac{\overline{v}}{q}\sin(\nu - \lambda) + \frac{\overline{w}}{q}\sin(\lambda - \mu) = 0,$$

$$(11) \qquad \left(\frac{\overline{v}}{q}\right)^2 - 2\frac{\overline{v}}{q}\frac{\overline{w}}{r}\cos(\mu - \nu) + \left(\frac{\overline{w}}{r}\right)^2 = e^{2h'\rho'}\sin^2(\mu - \nu),$$

qui montrent que les trajectoires atomiques sont généralement elliptiques. Si $h' = 0$ toutes les ellipses sont égales ; si h' n'est pas nul, les points à égale distance du plan (7) ont des trajectoires égales.

Les ellipses peuvent se réduire à des cercles ou à des drdites. Suivant les cas, la *polarisation* du mouvement simple est *elliptique*, *circulaire* ou *rectiligne*.

5. Problème. — *Déterminer la grandeur et la direction des axes principaux des trajectoires elliptiques dans un mouvement simple persistant.*

Les déplacements $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ sont les parties réelles des valeurs (2) de u, v, w, qui, en posant $s' = 0$ et $h\rho - st = \varphi$, deviennent

$$(12) \qquad u = \mathrm{P}e^{h'\rho' + \varphi i}, \quad v = \mathrm{Q}e^{h'\rho' + \varphi i}, \quad w = \mathrm{R}e^{h'\rho' + \varphi i};$$

par suite, en désignant par P_0, Q_0, R_0 les imaginaires conjuguées de P, Q, R, on aura

$$(13) \qquad \begin{cases} 2\overline{u} = e^{h'\rho'}(\mathrm{P}e^{\varphi i} + \mathrm{P}_0 e^{-\varphi i}), \\ 2\overline{v} = e^{h'\rho'}(\mathrm{Q}e^{\varphi i} + \mathrm{Q}_0 e^{-\varphi i}), \\ 2\overline{w} = e^{h'\rho'}(\mathrm{R}e^{\varphi i} + \mathrm{R}_0 e^{-\varphi i}). \end{cases}$$

A l'aide de ces valeurs, et en posant

(14) $$\mathrm{M}e^{\theta i} = e^{2h'\rho'}(\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2),$$

(15) $$\mathrm{I} = e^{2h'\rho'}(p^2 + q^2 + r^2),$$

on trouve aisément que la distance δ, qui sépare un point quelconque de sa position d'équilibre, est déterminée par la formule

(16) $$2\delta^2 = \mathrm{I} + \mathrm{M}\cos(2\varphi + \theta),$$

de sorte que le maximum et le minimum de δ s'obtiennent en posant $2\varphi + \theta = 0$ et $2\varphi + \theta = \pi$, et se déduisent de la relation

(17) $$2\delta^2 = \mathrm{I} \pm \mathrm{M}.$$

Pour le grand axe, on a $\varphi = -\frac{\theta}{2}$, et les projections de demi-grand axe sont les parties réelles des valeurs correspondantes de u, v, w, qui sont, d'après les formules (12),

(18) $$u = \mathrm{P}e^{h'\rho'}e^{-\frac{\theta}{2}i}, \quad v = \mathrm{Q}e^{h'\rho'}e^{-\frac{\theta}{2}i}, \quad w = \mathrm{R}e^{h'\rho'}e^{-\frac{\theta}{2}i}.$$

Pour le petit axe, on a

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2};$$

par suite, les projections du demi-petit axe sont les parties réelles de trois imaginaires obtenues en multipliant les précédentes par $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$, c'est-à-dire les *coefficients des parties imaginaires* des expressions (18).

Les formules (17) et (18) ramènent la solution du problème à la détermination du module et de l'argument de la forme imaginaire

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2.$$

Quand le mouvement se propage sans s'affaiblir, on a $h' = 0$, et on déduit de ce qui précède le théorème suivant :

Dans tout mouvement simple polarisé elliptiquement, représenté par

les intégrales (2), *les demi-axes principaux des trajectoires sont donnés par la formule* $\delta^2 = \frac{1}{2}(\mathrm{I} \pm \mathrm{M})$, *dans laquelle* I *désigne* l'intensité *du mouvement vibratoire, et* M *le module de l'expression*

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2.$$

De plus, les projections sur les trois axes coordonnés du demi-grand axe (*et du demi-petit axe*) *sont représentées par les parties réelles* (*et les coefficients de* i) *des trois imaginaires que l'on obtient en multipliant les constantes* P, Q, R *par* $\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

6. *Polarisation circulaire.* — Pour qu'un mouvement persistant soit polarisé circulairement, il faut et il suffit que les deux valeurs (17) de δ soit égales, et, par suite, que M soit nul; on doit donc avoir

$$\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2 = 0.$$

7. *Polarisation rectiligne.* — Pour que la polarisation soit rectiligne, il faut et il suffit que les valeurs des déplacements soient, quel que soit φ, proportionnelles à des constantes réelles. Il faut donc que les rapports de deux des quantités P, Q, R à la troisième soient réels.

8. Nous terminerons ce qui est relatif à la polarisation des mouvements simples par une remarque sur le sens dans lequel s'effectuent les vibrations non rectilignes.

Nous appellerons *direct* le mouvement d'un point se mouvant sur les plans coordonnés de oy vers oz, de oz vers ox, ou de ox vers oy. Cela posé, si on considère un mouvement simple projeté sur le plan xoy, les équations de ce mouvement seront

$$\overline{u} = pe^{h'\rho'}\cos(h\rho - st + \lambda),$$
$$\overline{v} = qe^{h'\rho'}\cos(h\rho - st + \mu).$$

Soit φ l'angle (croissant dans le sens direct) que fait avec ox la pro-

jection ε du rayon vecteur. De la relation $\tang\varphi = \frac{\bar{v}}{u}$, on déduit

$$\varepsilon^2 \frac{d\varphi}{dt} = spqe^{2h'\rho'} \sin(\mu - \lambda).$$

Donc, le sens du mouvement projeté est direct ou rétrograde suivant que $\sin(\mu - \lambda)$ est positif ou négatif, ou, ce qui revient au même, suivant que le coefficient de i, dans le rapport $\frac{Q}{P}$, est positif ou négatif.

9. On voit par ce qui précède comment toutes les particularités relatives à la *polarisation* d'un mouvement simple se déduisent des valeurs des constantes P, Q, R, auxquelles sont proportionnelles les intégrales simples correspondantes. C'est de l'équation caractéristique (4) que résultent les lois de la *propagation* du mouvement.

En effet, cette équation détermine en général la *longueur d'ondulation* et le *coefficient d'extinction* d'une onde plane persistante qui se propage dans une direction donnée, et s'éteint à partir d'un plan déterminé.

Soient effectivement (l, m, n) et (l', m', n') les cosinus des angles que les normales aux plans (6) et (7) font avec les axes. On aura, en conservant les notations des formules (5) et (9),

$$\alpha = h'l' + hli, \quad \beta = h'm' + hmi, \quad \gamma = h'n' + hni, \quad \sigma = si,$$

et l'équation caractéristique devient

$$\text{(19)} \qquad F(h'l' + hli,\ h'm' + hmi,\ h'n' + hni,\ si) = 0.$$

Le premier membre de cette équation est imaginaire de la forme $X + Yi$, et le système simultané $X = 0$, $Y = 0$, résolu par rapport à h et h', devra présenter une solution réelle, si la propagation d'une onde plane évanescente dans la direction donnée est compatible avec la constitution du milieu que l'on considère ; h' fournit le coefficient d'extinction, et la longueur d'ondulation s'obtient en divisant 2π par h.

Si une onde plane peut se propager sans affaiblissement dans une direction donnée, la valeur correspondante de h doit être une racine

réelle de l'équation

$$(20) \qquad F(hli,\ hmi,\ hni,\ \sigma i) = 0.$$

10. Lorsque le plan des ondes coïncide avec le plan d'extinction, on a $l' = l$, $m' = m$, $n' = n$, et en posant $h' + hi = k$, $si = \sigma$, l'équation (19) devient

$$(21) \qquad F(kl,\ km,\ kn,\ \sigma) = 0.$$

Dans ce cas, si on résout l'équation par rapport à k, toute racine dépourvue de partie réelle correspond à un mouvement simple non évanescent. De sorte que l'onde ne s'éteint pas, ou s'éteint, suivant que le rapport $\frac{k}{\sigma}$ est réel ou imaginaire.

La substitution de l'équation (21) à l'équation (19) simplifie notablement la discussion de l'équation caractéristique, et suffit à l'étude des propriétés essentielles des vibrations lumineuses propagées par les cristaux. Le cas particulier auquel elle se rapporte se réalise pour les ondes réfractées qui se propagent dans un cristal imparfaitement transparent, quand les ondes incidentes sont parallèles à la face réfringente du cristal.

CHAPITRE II.

RÉDUCTION DES ÉQUATIONS DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES DE L'ÉTHER D'APRÈS L'HYPOTHÈSE QUI ASSIMILE CE MILIEU A UN SYSTÈME PÉRIODIQUEMENT ISOTROPE.

1. L'analyse qui fait l'objet de ce Chapitre est basée sur les hypothèses suivantes :

1° L'éther peut être assimilé à un système de points s'attirant ou se repoussant. L'action mutuelle de deux points, dirigée suivant la ligne qui les joint, est une fonction de la distance qui s'évanouit dès que la variable dont elle dépend dépasse une limite très-petite;

2° La sphère d'activité de chaque point de l'éther renferme un nombre extrêmement grand d'atomes distribués sans régularité;

3° La densité de l'éther renfermé dans un cristal est sensiblement constante dans l'étendue de la sphère d'action d'un de ses points.

Pour légitimer cette dernière supposition, il suffit d'admettre que le rayon de la sphère d'action est très-petit par rapport aux dimensions d'un parallélipède élémentaire de l'assemblage des molécules matérielles. En effet, la densité de l'éther en un point quelconque peut être considérée comme une fonction continue des coordonnées qui fixent la position de ce point dans l'intérieur d'une alvéole de l'assemblage moléculaire. Si on passe de ce point à un autre compris dans sa sphère d'action, les coordonnées varient, dans l'hypothèse adoptée, de quantités très-petites par rapport à elles-mêmes, et la densité reçoit un accroissement du même ordre, qui peut être négligé dans le calcul de certains termes.

2. En se basant sur ces hypothèses, on est conduit à des équations identiques à celles que l'on obtiendrait en supposant que la constitution de l'éther est la même, dans tous les sens, autour de chaque point.

Leur forme est la même que celle des équations auxquelles satisfont les vibrations d'un milieu homogène et isotrope; seulement, les coefficients sont alors des fonctions périodiques des coordonnées.

Les hypothèses admises reviennent donc à considérer l'éther renfermé dans un cristal comme constituant un système *périodiquement isotrope*.

3. Ce résultat paraîtra d'ailleurs fort naturel si on observe qu'un système de *points* doit être parfaitement mobile, à la manière des *fluides* pondérables dont les molécules sont sphériques, ou sont du moins assez éloignées les unes des autres pour que leur forme n'ait aucune influence sensible sur leur action mutuelle. En vertu de cette mobilité parfaite, les forces extérieures au système doivent disposer les points de manière que leur intervalle moyen soit le même autour d'un point, dans toutes les directions.

La cause particulière qui, dans les corps cristallisés ou non, retient les molécules sur les directions où elles sont plus ou moins resserrées ne peut être, suivant une remarque de Poisson [*], que la partie de leur action qui dépend de leur forme et de leur situation relatives.

---

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, XXe cahier, p. 93.

Si donc on considère l'éther comme un système de points, l'état statique qu'il présente dans l'intérieur d'un corps pondérable doit être assimilé, non à la constitution d'un corps cristallisé ou d'un solide homogène déformé, mais à celle d'un *fluide* soumis à des forces extérieures. Tel serait, par exemple, un gaz magnétique répandu dans un système de petits aimants distribués périodiquement.

Il y a donc lieu de supposer que l'éther des corps pondérables n'est pas *homogène*, mais reste *isotrope*.

On verra d'ailleurs, dans la suite de ce travail, qu'il suffit d'avoir égard à la *périodicité* des coefficients dont dépendent les équations de ses mouvements vibratoires, pour expliquer, dans cette hypothèse, non-seulement la double réfraction, mais encore la polarisation elliptique et circulaire qu'impriment à la lumière certains cristaux dissymétriques. Il n'est donc pas nécessaire de supposer, comme on l'a fait jusqu'à présent, que l'action de la matière pondérable modifie l'intervalle moyen des atomes de l'éther dans les diverses directions, autour d'un même point.

Analyse.

4. Supposons d'abord l'éther en équilibre. Soient :

μ et m les masses de deux atomes voisins;
x, y, z les coordonnées rectangulaires de μ;
$x+h$, $y+k$, $z+l$, celles de m;
r la distance des deux atomes;
$\mu m r f(r)$ leur action mutuelle.

Les composantes suivant les axes de la force accélératice exercée par m sur μ sont $mhf(r)$, $mkf(r)$, $mlf(r)$, et en désignant par X, Y, Z les composantes de la force accélératrice exercée par la matière sur ce même point, les équations de l'équilibre sont

$$(1)\qquad \begin{cases} X + \sum mhf(r) = 0, \\ Y + \sum mkf(r) = 0, \\ Z + \sum mlf(r) = 0, \end{cases}$$

le $\sum$ s'étendant à tous les atomes m compris dans la sphère d'action de μ.

5. Supposons maintenant que le milieu vibre. Soient u, v, w les déplacements de μ et $u + \delta u$, $v + \delta v$, $w + \delta w$ ceux de m: la distance de ces points devient $r + \delta r$, et en négligeant les produits des δ, on a, pour les composantes de la force accélératrice exercée sur le point μ par l'éther environnant,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum mhf(r) + \sum m\, f(r)\,\delta u + \sum mhf'(r)\,\delta r,\\ &\sum mkf(r) + \sum m\, f(r)\,\delta v + \sum mk\,f'(r)\,\delta r,\\ &\sum mlf(r) + \sum m f'(r)\,\delta w + \sum ml\, f'(r)\,\delta r. \end{aligned}\right.$$

Si on suppose enfin que les déplacements de l'éther sont très-petits par rapport aux dimensions d'un parallélipipède élémentaire de l'assemblage moléculaire, les variations correspondantes de X, Y, Z sont négligeables, et, en ayant égard aux équations (1), on obtient pour les équations du mouvement

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} D_t^2 u &= \sum m f(r)\,\delta u + \sum mh\,f'(r)\,\delta r,\\ D_t^2 v &= \sum m f(r)\,\delta v + \sum mk\,f'(r)\,\delta r,\\ D_t^2 w &= \sum m f(r)\,\delta w + \sum ml\,f'(r)\,\delta r. \end{aligned}\right.$$

La variation δr est donnée par la formule

$$(r + \delta r)^2 = (h + \delta u)^2 + (k + \delta v)^2 + (l + \delta w)^2,$$

qui se réduit à

$$r\delta r = h\delta u + k\delta v + l\delta w$$

dans l'approximation adoptée.

6. Pour transformer les équations (3) en équations aux dérivées partielles, il suffit de développer les δ par la série de Taylor, suivant

la formule symbolique

$$\delta = e^{h D_x + k D_y + l D_z} - 1.$$

On obtient ainsi les équations des mouvements vibratoires sous la forme

$$(4)\qquad \begin{cases} D_t^2 u = F_1 u + F_2 v + F_3 w, \\ D_t^2 v = G_1 u + G_2 v + G_3 w, \\ D_t^2 w = H_1 u + H_2 v + H_3 w, \end{cases}$$

les F, G, H étant déterminés par les formules

$$(5)\qquad \begin{cases} F_1 = \sum m f(r)(e^\lambda - 1) + \sum m \frac{f'(r)}{r} h^2 (e^\lambda - 1), \\ G_2 = \sum m f(r)(e^\lambda - 1) + \sum m \frac{f'(r)}{r} k^2 (e^\lambda - 1), \\ H_3 = \sum m f(r)(e^\lambda - 1) + \sum m \frac{f'(r)}{r} l^2 (e^\lambda - 1), \\ F_2 = G_1 = \sum m \frac{f'(r)}{r} kl\,(e^\lambda - 1), \\ H_1 = F_3 = \sum m \frac{f'(r)}{r} lh\,(e^\lambda - 1), \\ G_3 = H_2 = \sum m \frac{f'(r)}{r} hk\,(e^\lambda = 1), \\ \lambda = h D_x + k D_y + l D_z. \end{cases}$$

Cauchy a écrit les équations (4) sous une forme symbolique fort simple. Écrivant α, β, γ, σ au lieu de D_x, D_y, D_z, D_t, il pose

$$(6)\qquad \begin{cases} A = \sum m f(r)(e^\lambda - 1), \\ B = \sum m \frac{f'(r)}{r}\left(e^\lambda - 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right); \end{cases}$$

on a alors

$$(7)\qquad \begin{cases} F_1 = A + D_\alpha^2 B, \quad F_2 = G_1 = D_\beta D_\gamma B, \\ G_2 = A + D_\beta^2 B, \quad H_1 = F_3 = D_\gamma D_\alpha B, \\ H_3 = A + D_\gamma^2 B, \quad G_3 = H_2 = D_\alpha D_\beta B; \end{cases}$$

et les équations (4) deviennent

$$(8)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = \mathrm{A}u + \mathrm{D}_\alpha(\mathrm{D}_\alpha \mathrm{B}u + \mathrm{D}_\beta \mathrm{B}v + \mathrm{D}_\gamma \mathrm{B}w), \\ \sigma^2 v = \mathrm{A}v + \mathrm{D}_\beta(\mathrm{D}_\alpha \mathrm{B}u + \mathrm{D}_\beta \mathrm{B}v + \mathrm{D}_\gamma \mathrm{B}w), \\ \sigma^2 w = \mathrm{A}w + \mathrm{D}_\gamma(\mathrm{D}_\alpha \mathrm{B}u + \mathrm{D}_\beta \mathrm{B}v + \mathrm{D}_\gamma \mathrm{B}w), \end{cases}$$

les seconds membres représentant les fonctions symboliques F, G, H dont dépend la forme des équations auxiliaires. Le calcul de ces fonctions est ainsi ramené à celui des deux fonctions A et B dont la réduction peut d'ailleurs être effectuée comme si ses symboles α, β, γ étaient des quantités réelles.

7. Pour réduire A et B, il suffit d'employer la méthode indiquée par Cauchy dans son Mémoire sur les deux espèces d'ondes planes qui peuvent se propager dans les systèmes isotropes de points (1).

Soit un point m compris dans la sphère d'action du point μ, désignons par r la distance μm et par φ et θ la colatitude et la longitude de cette distance, de sorte que les projections de r sur les trois axes sont

$$h = r\cos\varphi, \quad k = r\sin\varphi\cos\theta, \quad l = r\sin\varphi\sin\theta.$$

Imaginons un cône très-délié, ayant son sommet au point μ, renfermant le point m et découpant sur une sphère concentrique de rayon égal à 1 l'élément superficiel ω. Décrivons de plus, du point μ comme centre, deux sphères très-rapprochées avec les rayons r et $r+\Delta r$. Le volume très-petit compris entre ces trois surfaces est $r^2\omega\Delta r$; il renferme un grand nombre d'atomes dont la masse s'obtient en multipliant le volume par la densité de l'éther au point m, que nous supposons ne pas différer sensiblement de la densité ρ de l'éther au point μ.

On voit que l'on a, dans cette hypothèse,

$$(9)\quad \begin{cases} \mathrm{A} = \rho \sum\sum r^2 f(r)(e^\lambda - 1)\,\omega\Delta r, \\ \mathrm{B} = \rho \sum\sum r f'(r)\left(e^\lambda - 1 - \lambda - \dfrac{\lambda^2}{2}\right)\omega\Delta r. \end{cases}$$

(1) *Nouveaux exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. Ier.

Le premier signe de sommation $\sum$ s'étend à tous les éléments ω d'une sphère de rayon égal à l'unité, et le second à toutes les valeurs de r croissant par degrés très-petits Δr d'une valeur très-petite à une limite égale au rayon de la sphère d'activité de l'éther.

Enfin, si l'on substitue, avec Poisson, à la première sommation une intégrale définie, il vient

$$(10)\quad \begin{cases} \mathrm{A} = \rho \sum r^2 f(r)\, \mathrm{I}\, \Delta r, \\ \mathrm{B} = \rho \sum r f'(r)\, \mathrm{I}'\, \Delta r, \end{cases}$$

I et I' désignant les deux intégrales définies

$$(11)\quad \begin{cases} \mathrm{I} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} (e^{\lambda} - 1) \sin\varphi \, d\varphi, \\ \mathrm{I}' = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \left(e^{\lambda} - 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right) \sin\varphi \, d\varphi, \end{cases}$$

où l'on a

$$\lambda = r(\alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi \cos\theta + \gamma \sin\varphi \cos\theta).$$

Ces intégrales sont réductibles à une intégrale simple. En effet, d'après une formule de Poisson, on a généralement

$$(12)\quad \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} f(u) \sin\varphi \, d\varphi = \frac{2\pi}{k} \int_{-k}^{k} f(x)\, dx,$$

en posant

$$u = \alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi \cos\theta + \gamma \sin\varphi \sin\theta,$$
$$k^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

En tenant compte de cette formule, on trouve

$$(13)\quad \begin{cases} \mathrm{I} = 2\pi\left(\frac{e^{kr} - e^{-kr}}{kr} - 2\right) = 4\pi\left(\frac{k^2 r^2}{6} + \ldots\right), \\ \mathrm{I}' = 2\pi\left(\frac{e^{kr} - e^{-kr}}{kr} - 2 - \frac{k^2 r^2}{3}\right) = 4\pi\left(\frac{k^4 r^4}{120} + \ldots\right). \end{cases}$$

Substituant enfin ces valeurs de I, I′ dans les formules (10), il ne reste qu'à effectuer la sommation relative à r.

8. Cette sommation ne peut être qu'indiquée puisque la forme de la fonction $f(r)$ est inconnue. Mais, sans qu'il soit nécessaire d'effectuer le calcul, on voit que A et B sont des fonctions de k^2. En désignant alors par B′ et B″ les dérivées première et seconde de B par rapport à k^2, et posant

$$(14) \qquad \begin{cases} A + 2B' = E(k^2), \quad 4B'' = F(k^2), \\ \theta = \alpha u + \beta v + \gamma w, \end{cases}$$

on réduit les équations (8) aux suivantes

$$(15) \qquad \begin{cases} \sigma^2 u = E(k^2)\, u + F(k^2)\, \alpha\theta, \\ \sigma^2 v = E(k^2)\, v + F(k^2)\, \beta\theta, \\ \sigma^2 w = E(k^2)\, w + F(k^2)\, \gamma\theta. \end{cases}$$

Telles sont les équations des vibrations de l'éther, *dans le vide comme dans les milieux matériels*. Dans le vide, les coefficients sont des constantes. Dans les milieux matériels, ils sont des fonctions de x, y, z.

9. En supposant constants les coefficients des équations (15), on en déduit aisément, comme Cauchy l'a fait le premier, les propriétés des ondes planes propagées par l'éther du vide.

Pour qu'un mouvement simple représenté par les intégrales

$$\frac{u}{P} = \frac{v}{Q} = \frac{w}{R} = e^{\alpha x + \beta y + \gamma z - \sigma t},$$

soit compatible avec la constitution du système, il faut que ses paramètres satisfassent aux trois équations obtenues en écrivant P, Q, R au lieu de u, v, w dans le système (15), et en y considérant σ, α, β, γ, non plus comme des caractéristiques de dérivation, mais comme des constantes.

Éliminant P, Q, R, on a l'équation caractéristique qui se dédouble

comme il suit :

(16) $$\sigma^2 = E(k^2),$$

(17) $$\sigma^2 = E(k^2) + F(k^2)k^2.$$

Dans le premier cas, on trouve

(18) $$\theta = \alpha P + \beta Q + \gamma R = 0,$$

et dans le second

(19) $$\frac{P}{\alpha} = \frac{Q}{\beta} = \frac{R}{\gamma},$$

relations d'où il résulte que les mouvements simples et non évanescents que peut propager l'éther du vide sont nécessairement de deux sortes : les uns dans lesquels les vibrations sont parallèles au plan des autres, sans polarisation déterminée; les autres, dans lesquels les vibrations sont perpendiculaires à ce plan. Ces deux genres de vibrations constituent les ondes *transversales* et *longitudinales*.

10. Ces propriétés cessent de subsister, en général, pour les vibrations propagées dans un milieu cristallisé. Les coefficients des équations (15) deviennent des fonctions périodiques des coordonnées, et il faut appliquer la méthode d'intégration développée dans le premier Mémoire. Les équations auxiliaires se déduisent alors, d'après la règle générale énoncée dans ce Mémoire, des trois fonctions symboliques F, G, H, qui se réduisent actuellement aux seconds membres des équations (15). D'ailleurs, la forme de ces trois fonctions se simplifie encore en ayant égard aux remarques suivantes.

11. L'observation indique que dans le vide :

1° Les vibrations lumineuses sont transversales;

2° Les rayons de différentes couleurs se propagent avec la même vitesse.

Il résulte de ces deux propriétés que la valeur de $\frac{\sigma}{k}$ déduite de l'équation (10) est indépendante de σ, et que, par suite, la fonction $E(k^2)$ se réduit sensiblement à son premier terme.

Il suffit, pour que cette condition soit réalisée, que les deux séries (13) très-convergentes à cause de la petitesse de r, se réduisent sensiblement à leurs premiers termes. Comme il n'existe d'ailleurs aucune raison de supposer que les termes négligeables dans le vide aient une valeur sensible dans l'intérieur des corps pondérables, on voit que les équations générales des vibrations se réduisent aux suivantes :

$$(20)\qquad \begin{cases} \sigma^2 u = ek^2 u + f\alpha\theta, \\ \sigma^2 v = ek^2 v + f\beta\gamma, \\ \sigma^2 w = ek^2 w + f\gamma\theta, \end{cases}$$

dans lesquelles e et f désignent des constantes ou des fonctions périodiques, suivant que l'on considère l'éther libre ou l'éther renfermé dans un cristal.

Les coefficients e et f ont les valeurs suivantes, d'après les formules (14), (10) et (13) :

$$(21)\qquad \begin{cases} e = \frac{4\pi\rho}{6}\sum\left[r^4 f(r) + \frac{1}{5} r^5 f'(r)\right]\Delta r, \\ f = \frac{4\pi\rho}{6}\sum\frac{2}{5} r^5 f'(r)\,\Delta r. \end{cases}$$

12. Appliquant actuellement aux équations (20) la règle générale qui sert à former les équations auxiliaires qui régissent les vibrations moyennes [*], on trouve que ces équations sont de la forme suivante :

$$(22)\qquad \begin{cases} \sigma^2 u = k^2(F_1 u + F_2 v + F_3 w) + (f_1\alpha + f_2\beta + f_3\gamma)\,\theta, \\ \sigma^2 v = k^2(G_1 u + G_2 v + G_3 w) + (g_1\alpha + g_2\beta + g_3\gamma)\,\theta, \\ \sigma^2 w = k^2(H_1 u + H_2 v + H_3 w) + (h_1\alpha + h_2\beta + h_3\gamma)\,\theta, \end{cases}$$

les f, g, h, F, G, H désignant des fonctions symboliques entières et à coefficients constants de α, β, γ.

Nous rappelons que σ, α, β, γ représentent les caractéristiques de dérivation D_t, D_x, D_y, D_z, et que l'on a, dans les équations (22),

$$k^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad \theta = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XII, 1867, p. 17.

13. En se reportant d'ailleurs à l'analyse du Mémoire précité, on voit que les fonctions indéterminées dont dépendent les équations (22) doivent être considérées comme des séries ordonnées suivant les puissances de α, β, γ, très-rapidement convergentes en général. On pourra donc, dans une première approximation, les réduire à des constantes. Dans ce cas, les équations (22) renferment 18 termes du second ordre au lieu de 54 que laissait subsister l'analyse du premier Mémoire.

On obtient de nouvelles approximations en conservant successivement dans ces fonctions les termes du premier, du deuxième, etc., ordre par rapport à α, β, γ. Les termes dont il s'agit fournissent l'explication de la dispersion, de la polarisation elliptique et de l'extinction que présentent certains cristaux.

14. Les équations (22) constituent le résultat définitif que nous nous proposions d'obtenir dans ce Chapitre. Le système (20) dont elles dérivent, quand on y considère les coefficients comme constants, ne sont pas altérées par une substitution linéaire orthogonale appliquée aux variables x, y, z, ou, ce qui revient au même, restent les mêmes quand on déplace d'une manière quelconque autour de l'origine le système des axes coordonnés.

Les hypothèses d'où se déduisent les équations (20) reviennent par conséquent à considérer l'éther comme présentant, en chacun de ses points, la même constitution dans toutes les directions.

Cette constitution varie d'ailleurs d'un point à un autre de l'éther compris dans l'intérieur d'un corps; mais, en un point déterminé, elle est la même dans tous les sens. Ainsi se trouve justifiée la dénomination de *périodiquement isotrope* que nous avons employée au commencement de ce Chapitre pour caractériser la constitution que présente probablement l'éther dans l'intérieur des corps cristallisés.

15. Les équations (22) reçoivent d'importantes réductions par suite de la symétrie propre aux divers systèmes cristallins. On obtient ces réductions par la méthode générale qui est développée dans notre premier Mémoire.

D'après cette méthode [*], on détermine l'influence des divers élé-

---

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XII, 1867, p. 25.

ments de symétrie communs au polyèdre moléculaire et à l'assemblage cristallin, en exprimant que les équations auxiliaires, mises sous la forme générale

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma^2 u &= F_1 u + F_2 v + F_3 w,\\ \sigma^2 v &= G_1 u + G_2 v + G_3 w,\\ \sigma^2 w &= H_1 u + H_2 v + H_3 w,\end{aligned}\right.$$

ne sont pas altérées par certaines substitutions linéaires appliquées simultanément à u, v, w et à α, β, γ. Les seconds membres des équations (21) sont linéaires et homogènes par rapport à u, v, w, et de cette condition résulte essentiellement la forme que présentent, suivant les cas, les F, G, H fonctions de α, β, γ.

Cela posé, si on revient aux équations (22), et si on observe :

1° Que k^2 et θ se reproduisent identiquement quand on applique une substitution linéaire quelconque aux variables u, v, w et α, β, γ;

2° Que les termes proportionnels à k^2 et à θ sont fonctions linéaires et homogènes, les premiers de u, v, w, les seconds de α, β, γ.

Il sera aisé de conclure que, dans chaque symétrie particulière, les fonctions F_1 et f_1 des équations (22) seront composées en α, β, γ comme la fonction F_1 des équations (23); les fonctions F_2 et f_2 du système (22) comme la fonction F_2 du système (23), et ainsi de suite.

On pourra donc écrire sans difficulté, en se reportant aux divers systèmes précédemment obtenus [*], les diverses classes d'équations auxiliaires qui se déduisent des équations (22), quand on tient compte, non-seulement du système cristallin, mais encore des divers cas de mériédrie (hémiédrie ou tétartoédrie) que présente chaque système.

16. Parmi les divers systèmes d'équations que l'on obtient ainsi, il faut remarquer celui qui est relatif à l'*holoaxie centrée de la symétrie terbinaire* (système du prisme droit à base rectangle), lorsque dans une première approximation on réduit les équations auxiliaires à l'homogénéité.

Ce système doit fournir, en effet, l'explication complète des phénomènes optiques que présentent (quand on néglige la dispersion) les

---

[*] *Loc. cit.*, p. 34 et suivantes.

cristaux holoédriques connus sous le nom de *cristaux à deux axes optiques*, c'est-à-dire des phénomènes qui, sous le nom de *double réfraction* et *polarisation*, ont si vivement attiré, depuis Fresnel, l'attention des physiciens et des géomètres.

Or, en ayant égard aux remarques du numéro précédent, on obtient immédiatement les équations dont il s'agit :

$$(24)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = fk^2 u + f_1\,\alpha\theta, \\ \sigma^2 v = gk^2 v + g_1\,\beta\theta, \\ \sigma^2 w = hk^2 w + h_1\,\gamma\theta, \end{cases}$$

les f, g, h de ces formules représentant des paramètres constants.

Rétablissant enfin les caractéristiques de dérivation, on obtient le système suivant :

$$(25)\quad \begin{cases} D_t^2 u = f(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\,u + f_1\,D_x(D_x u + D_y v + D_z w), \\ D_t^2 v = g(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\,v + g_1\,D_y(D_x u + D_y v + D_z w), \\ D_t^2 w = h(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)\,w + h_1\,D_z(D_x u + D_y v + D_z w). \end{cases}$$

Ces équations conduisent à de nouvelles et importantes propriétés des ondes lumineuses, dont l'étude fait l'objet d'un des Chapitres suivants.

Nous nous bornerons à remarquer ici que ces équations renferment *six paramètres distincts*. L'étude approfondie des phénomènes lumineux semble indiquer que *trois* seulement de ces paramètres, correspondant aux trois *indices principaux de réfraction*, sont réellement indépendants.

On verra, en effet, que l'on reproduit exactement les faits d'observation en supposant les trois relations

$$f + f_1 = g + g_1 = h + h_1 = 0.$$

Il paraît assez difficile de déterminer avec précision la cause physique de ces dernières relations, qui introduisent une extrême simplicité dans les équations des phénomènes et dans l'énoncé des lois qui en résultent. Nous essayerons cependant de montrer, dans le Chapitre

suivant, comment on peut en retrouver l'origine dans une hypothèse de Fresnel sur la constitution de l'éther. La discussion qui fait l'objet de ce Chapitre signalera plus d'un rapprochement entre les principes de la théorie que nous exposons et les hypothèses admises par l'illustre physicien sur la nature intime de l'agent qui propage les phénomènes lumineux.

CHAPITRE III.

REMARQUES SUR DEUX POINTS FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE PHYSIQUE DE LA LUMIÈRE.

Remarque I. — *L'hypothèse de Fresnel sur la variation de densité que la matière pondérable imprime à l'éther peut servir de base à une théorie de la double réfraction.*

1. On sait qu'une des hypothèses admises par Fresnel dans son *Mémoire sur les modifications que la réflexion imprime à la lumière polarisée* consiste à supposer que l'indice de réfraction d'une substance est proportionnel à la racine carrée de la densité de l'éther, contrairement aux idées admises depuis par Mac-Cullagh et M. Newmann, qui supposent que la densité de l'éther est la même dans tous les corps, et que son élasticité est seule altérée différemment par les divers milieux pondérables.

Or cette hypothèse de l'illustre physicien ne paraît guère conciliable avec les idées qu'il avait précédemment adoptées dans son célèbre *Mémoire sur la double réfraction,* où, négligeant toute variation de densité de l'éther dans les cristaux, il attribue la production des phénomènes à une variation de l'élasticité dans les diverses directions autour d'un point.

De là une sorte de contradiction que les considérations développées dans le Chapitre précédent font complétement disparaître, en établissant que la théorie de la double réfraction peut être exclusivement basée, comme celle de la réflexion, sur la variation périodique qu'éprouve la *densité* de l'éther dans l'intérieur des corps cristallisés.

2. En effet, les équations (25) du Chapitre précédent renferment évidemment une théorie complète de la double réfraction et de la po-

larisation, qui, si l'on fait provisoirement abstraction des relations naturelles qui peuvent exister entre les paramètres, ne doit différer de celle de Fresnel que par certaines particularités relatives à la direction des vibrations et à la forme de la surface des ondes. Ces équations ont été d'ailleurs déduites du système (20), en supposant seulement que les coefficients e et f sont des fonctions périodiques des coordonnées.

3. Cela posé, il est aisé de voir que la périodicité de ces deux coefficients dépend de celle d'un seul élément, qui est la *densité de l'éther*. En se reportant, en effet, aux valeurs (12) de e, f, on voit qu'elles s'obtiennent en multipliant la densité ρ par certaines sommes dont le calcul ne pourrait être achevé que si l'on connaissait la loi qui régit les actions intérieures de l'éther.

En considérant l'éther comme continu, les sommes pourraient être réduites à des intégrales définies prises entre deux limites égales à zéro et au rayon de la sphère d'activité de l'éther. Elles auraient donc des valeurs égales pour l'éther libre ou pour l'éther renfermé dans un corps quelconque, de sorte que e et f seraient proportionnels à la densité.

Mais, suivant une remarque de Poisson, ces intégrations autour d'un point ne sont pas admissibles en général, et il est nécessaire de considérer les $\sum$ comme des sommes aux différences finies.

4. Dans ce cas, on pourra effectuer ces sommations sur des termes tous proportionnels à l'*intervalle moyen* δ qui sépare deux points voisins de l'éther. Cet intervalle peut être considéré comme constant dans toute l'étendue de la sphère d'activité, puisqu'il est lié à la densité, supposée constante dans la même étendue, par une relation de la forme $\rho = \frac{k}{\delta^3}$, k désignant un nombre constant.

En conséquence, le résultat final des sommations ne pourra contenir que des nombres, des constantes dépendant de la fonction des forces intérieures, et enfin l'intervalle δ. Les sommes $\sum$ sont des fonctions de δ, qui, puisque δ est inversement proportionnel à $\rho^{\frac{1}{3}}$, se transforment

en fonctions de ρ. On peut donc poser

$$e = \varphi(\rho), \quad f = \psi(\rho),$$

et l'on voit clairement ainsi qu'il suffit d'admettre une variation périodique de la densité pour déduire des équations (20), par la méthode générale d'intégration, le système auxiliaire (25), d'où on déduit enfin les lois qui régissent la double réfraction et la polarisation des vibrations moyennes.

Remarque II. — *Les relations qui existent entre les paramètres des équations auxiliaires peuvent être rattachées à la cause physique qui, suivant une hypothèse de Fresnel, produit l'absence de toute vibration longitudinale dans l'éther.*

5. Nous avons remarqué, à la fin du Chapitre précédent, que l'on était conduit à des résultats conformes aux faits observés, en supposant entre les paramètres des équations (25) les relations

$$f + f_1 = g + g_1 = h + h_1 = 0.$$

Pour admettre ces relations, il suffit d'admettre que les deux fonctions φ et ψ sont égales et de signes contraires, de sorte que l'on a

(1) $$\varphi(\rho) + \psi(\rho) = 0.$$

Or il est remarquable que dans cette hypothèse la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans l'éther libre, déduite de l'équation $\sigma^2 = (e + f)k^2$, se réduit à zéro.

On voit donc que la relation hypothétique (1) revient à attribuer à l'éther cette inaptitude à propager les vibrations longitudinales que Fresnel considérait comme la propriété caractéristique de ce milieu élastique.

6. Sans rechercher ici quelle peut être l'origine de cette propriété, nous l'admettrons avec la relation fondamentale (1), qui en est la formule équivalente, comme un postulatum dont l'exactitude est démontrée par la confirmation expérimentale des conséquences qui en résultent.

Nous supposerons donc désormais que les vibrations de l'éther, dans un milieu quelconque, sont régies par les équations

$$(2)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = e(k^2 u - \alpha\theta), \\ \sigma^2 v = e(k^2 v - \beta\theta), \\ \sigma^2 w = e(k^2 w - \gamma\theta), \end{cases}$$

dans lesquelles e désigne une fonction de la densité, et, par suite, une fonction périodique des coordonnées.

En posant, pour abréger,

$$(3)\qquad U = k^2 u - \alpha\theta, \quad V = k^2 v - \beta\theta, \quad W = k^2 w - \gamma\theta,$$

on trouve que le système des équations auxiliaires est réductible à la forme

$$(4)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = F_1 U + F_2 V + F_3 W, \\ \sigma^2 v = G_1 U + G_2 V + G_3 W, \\ \sigma^2 w = H_1 U + H_2 V + H_3 W, \end{cases}$$

et que les F, H, G, fonctions de α, β, γ, éprouvent, par suite de la symétrie cristalline, les mêmes réductions que les fonctions désignées par les mêmes lettres dans le système général des équations auxiliaires considérées au second Chapitre de notre premier Mémoire. Par suite, on obtiendra les équations (4) relatives aux divers systèmes et cas particuliers de mériédrie, en écrivant U, V, W au lieu de u, v, w dans les seconds membres des équations obtenues dans le Mémoire précité.

7. Pour donner une idée des résultats définitifs que fournit la théorie précédente, nous avons réuni dans un tableau, à la fin de ce Chapitre, les équations aux dérivées partielles qui, *en conservant les termes du second et du troisième ordre,* régissent les vibrations lumineuses dans les principaux systèmes.

Nous laissons de côté les systèmes *asymétrique* et *binaire,* qui donnent lieu à des équations assez complexes, et exigent, suivant toute probabilité, l'emploi spécial de certaines coordonnées obliques.

Nous renvoyons enfin aux deux Chapitres suivants l'étude des propriétés principales des ondes planes.

8. Il importe d'observer que les principes d'où résultent ces équations font de notre théorie une sorte de commentaire à celle qu'a adoptée Fresnel dans son *Mémoire sur les modifications que la réflexion imprime à la lumière polarisée* [*]. Ce Mémoire peut être considéré comme l'expression des idées définitives de son auteur sur le mécanisme des phénomènes optiques. Il est, en effet, postérieur au *Mémoire sur la double réfraction* [**] et à un premier *Mémoire sur la réflexion* [***], où Fresnel a cherché à expliquer les lois de ce phénomène à l'aide d'hypothèses autres que celles d'une densité variable de l'éther.

Les physiciens ne verront donc peut-être pas sans intérêt que les notions fondamentales qui ont paru les plus plausibles à l'illustre physicien suffisent à une théorie complète de la double réfraction et de la polarisation rectiligne, et permettent même d'obtenir analytiquement les lois de la polarisation elliptique et circulaire constatées expérimentalement sur la lumière propagée par certains cristaux hémiédriques.

TABLEAU DES ÉQUATIONS QUI RÉGISSENT LES PHÉNOMÈNES OPTIQUES DANS LES CRISTAUX CLASSÉS D'APRÈS LA NATURE ET LE NOMBRE DE LEURS ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE.

Observation générale. — On a simplifié les équations ci-après en observant que la dilatation cubique θ des vibrations lumineuses, rigoureusement nulle dans les milieux isotropes, est généralement *très-petite* dans les cristaux. On peut, par suite, réduire approximativement, dans les termes du troisième ordre, U, V, W aux valeurs simples

$$U = k^2 u, \quad V = k^2 v, \quad W = k^2 w.$$

[*] Janvier 1823.

[**] Novembre 1821.

[***] Novembre 1819.

I. — *Symétrie terbinaire.*

1° *Holoaxie centrée ou homoédrie* $[\Lambda^2, 2L^2, C, \Pi, 2P]$:

$$(5)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta), \\ \sigma^2 w = h(k^2 w - \gamma\theta). \end{cases}$$

2° *Holoaxie hémisymétrique* $[\Lambda^2, 2L^2, oC, oP]$:

$$(6)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta) + k^2(\varphi_1 \gamma u + \varphi_2 \beta w), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta) + k^2(\chi_1 \alpha w + \chi_2 \gamma u), \\ \sigma^2 w = h(k^2 w - \gamma\theta) + k^2(\psi_1 \beta u + \psi_2 \alpha v). \end{cases}$$

3° *Hémiaxie dichosymétrique* $[\Lambda^2, oL^2, oC, 2P]$:

$$(7)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta) + k^2(\varphi_1 \alpha u + \varphi_2 \beta v + \varphi_3 \gamma w), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta) + k^2(\chi_1 \beta u + \chi_2 \alpha v), \\ \sigma^2 w = h(k^2 w - \gamma\theta) + k^2(\psi_1 \gamma u + \psi_2 \alpha w). \end{cases}$$

II. — *Symétrie ternaire.*

1° *Holoaxie centrée ou homoédrie* $[\Lambda^3, 3L^2, C, \Pi, 3P^2]$:

$$(8)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta), \\ \sigma^2 w = g(k^2 w - \gamma\theta). \end{cases}$$

2° *Holoaxie hémisymétrique* $[\Lambda^3, 3L^2, oC, oP]$:

$$(9)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta) + f_1 k^2(\beta w - \gamma v), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta) - k^2(g_1 \gamma u + g_2 \alpha w) + h_1 k^2(\beta v - \gamma w), \\ \sigma^2 w = g(k^2 w - \gamma\theta) + k^2(g_1 \beta u + g_2 \alpha v) - h_1 k^2(\beta w + \gamma v). \end{cases}$$

3° *Hémiaxie dichosymétrique* $[\Lambda^3, oL^2, oC, 3P]$:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma^2 u &= f(k^2 u - \alpha\theta) + f_1 k^2(\beta v + \gamma w),\\ \sigma^2 v &= g(k^2 v - \beta\theta) + k^2(g_1 \beta u + g_2 \alpha v) + h_1 k^2(\beta v - \gamma w),\\ \sigma^2 w &= g(k^2 w - \gamma\theta) + k^2(g_1 \gamma u + g_2 \alpha w) - h_1 k^2(\beta w + \gamma v).\end{aligned}\right.$$

III. — *Symétries quaternaire et sénaire.*

1° *Holoaxie centrée* ou *homoédrie* $[\Lambda^4, 4L^2, C, \Pi, 4P^2]$, $[\Lambda^6, 6L^2, C, \Pi, 6P^2]$:

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma^2 u &= f(k^2 u - \alpha\theta),\\ \sigma^2 v &= g(k^2 v - \beta\theta),\\ \sigma^2 w &= g(k^2 w - \gamma\theta).\end{aligned}\right.$$

2° *Holoaxie hémisymétrique* $[\Lambda^2, 4L^2, oC, oP]$, $[\Lambda^6, 6L^2, oC, oP]$:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma^2 u &= f(k^2 u - \alpha\theta) + f_1 k^2(\beta w - \gamma v),\\ \sigma^2 v &= g(k^2 v - \beta\theta) - k^2(g_1 \gamma u + g_2 \alpha w),\\ \sigma^2 w &= g(k^2 w - \gamma\theta) + k^2(g_1 \beta u + g_2 \alpha v).\end{aligned}\right.$$

3° *Hémiaxie dichosymétrique* $[\Lambda^4, oL^2, oC, 4P]$, $[\Lambda^6, oL^2, oC, 6P]$:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma^2 u &= f(k^2 u - \alpha\theta) + f_1 k^2(\beta v + \gamma w),\\ \sigma^2 v &= g(k^2 v - \beta\theta) + k^2(g_1 \beta u + g_2 \alpha v),\\ \sigma^2 w &= g(k^2 w - \gamma\theta) + k^2(g_1 \gamma u + g_2 \alpha w).\end{aligned}\right.$$

IV. — *Symétrie terquaternaire.*

1° *Holoaxie centrée* ou *homoédrie* $[3L^4, 4L^3, 6L^2, C, 3P^4, 6P^2]$:

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma^2 u &= f(k^2 u - \alpha\theta),\\ \sigma^2 v &= f(k^2 v - \beta\theta),\\ \sigma^2 w &= f(k^2 w - \gamma\theta).\end{aligned}\right.$$

2° *Holoaxie hémisymétrique* $[3L^4, 4L^3, 6L^2, oC, oP]$:

$$(15)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta) + f_1 k^2(\gamma v - \beta w), \\ \sigma^2 v = f(k^2 v - \beta\theta) + f_1 k^2(\alpha w - \gamma u), \\ \sigma^2 w = f(k^2 w - \gamma\theta) + f_1 k^2(\beta u - \alpha v). \end{cases}$$

3° *Hémiaxie hémisymétrique* $[3L^2, 4L^3, oC, oP]$:

$$(16)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta) + k^2(f_1 \gamma v + f_2 \beta w), \\ \sigma^2 v = f(k^2 v - \beta\theta) + k^2(f_1 \gamma w + f_2 \gamma u), \\ \sigma^2 w = f(k^2 w - \gamma\theta) + k^2(f_1 \beta u + f_2 \alpha v). \end{cases}$$

4° *Hémiaxie dichosymétrique* $[3L^2, 4L^3, oC, 6P]$:

$$(17)\quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta) + f_1 k^2(\gamma v + \beta w), \\ \sigma^2 v = f(k^2 v - \beta\theta) + f_1 k^2(\alpha w + \gamma u), \\ \sigma^2 w = f(k^2 w - \gamma\theta) + f_1 k^2(\beta u + \alpha v). \end{cases}$$

CHAPITRE IV.

SUR LES PROPRIÉTÉS DES ONDES PLANES DE L'ÉTHER RENFERMÉ DANS UN MILIEU HOMOÉDRIQUE.

1. Ce Chapitre est consacré à l'étude des ondes planes déduite des formules (5), (8) et (14) du tableau précédent.

Voici le résumé des principaux résultats obtenus :

Dans les cristaux à deux axes optiques, l'équation aux vitesses des ondes planes coïncide *rigoureusement* avec celle de Fresnel.

Quant à la polarisation, elle est déterminée par le théorème suivant : *La vibration d'une onde plane est dirigée dans le plan déterminé par la normale à l'onde et le rayon lumineux correspondant;* elle est de plus *perpendiculaire au rayon.* La vibration n'est donc pas comprise dans le plan de l'onde, comme le supposait Fresnel; sa direction fait avec ce plan un angle qui pour certains corps très-biréfringents, l'azotate de soude par exemple, peut dépasser 9 degrés.

2. Ce résultat conduit à des conséquences importantes pour la théorie de la réflexion et de la réfraction de la lumière à la surface des cristaux.

Bien que ces conséquences ne soient pas développées dans ce Mémoire, nous croyons devoir les indiquer brièvement, afin de préciser les circonstances qui servent de contrôle à la théorie et aux hypothèses sur lesquelles elle est basée.

3. La théorie de la réflexion et de la réfraction cristallines comprend deux problèmes distincts :

Le premier a pour objet la recherche des équations de condition auxquelles satisfont les déplacements atomiques sur la surface de séparation des deux milieux;

Le second comprend l'étude des mouvements simples ou par ondes planes que peuvent propager ces milieux.

4. *Principales solutions du premier problème.* — Dans ces recherches sur la réflexion, Fresnel a admis : 1° que le déplacement d'un atome de la surface réfringente, *estimé parallèlement à cette surface*, dans l'onde réfractée, se confond avec la résultante de ses déplacements estimés de la même manière dans l'onde incidente et dans l'onde réfléchie; 2° que la force vive des ondes réfléchie et réfractée est égale à celle de l'onde incidente.

Ces principes donnent trois équations à la surface. Il en faut quatre dans le cas des cristaux. Mac-Cullagh et M. Newmann ont complété la solution en étendant le *principe de continuité* de Fresnel aux déplacements *estimés suivant la normale* à la surface réfringente.

De son côté, Cauchy a obtenu, par diverses méthodes dont la rigueur serait difficilement contestée, quatre équations de condition qui reproduisent celles de Fresnel par la suppression de certains termes très-petits, mais sont incompatibles avec la quatrième condition introduite par Mac-Cullagh et M. Newmann.

5. *Principales solutions du second problème.* — Le second problème a été l'objet de nombreuses recherches des physiciens et des géomètres.

Suivant Fresnel, la vibration est dans le plan de l'onde et est dirigée dans le plan déterminé par la normale à l'onde et le rayon lumineux.

D'après Mac-Cullagh et M. Newmann, elle est située dans le plan de l'onde et est perpendiculaire au rayon. M. Lamé trouve le même résultat dans ses *Leçons sur l'Élasticité*.

D'après notre théorie, la vibration est dans le plan déterminé par la normale à l'onde et le rayon, comme le supposait Fresnel, et elle est perpendiculaire au rayon.

6. Cela posé, lorsque l'on introduit la polarisation de Fresnel dans les équations à la surface de Cauchy, on obtient des formules qui représentent la marche générale des phénomènes, mais attribuent à certains éléments directement mesurables, tels que les angles de polarisation totale, des valeurs numériques notablement différentes des valeurs observées.

Au contraire, en combinant la polarisation de Mac-Cullagh et de M. Newmann avec les équations à la surface admises par ces physiciens, on obtient des formules parfaitement concordantes avec les faits.

Enfin, en combinant les équations à la surface de Cauchy avec la polarisation que nous avons trouvée, on reproduit les formules exactes de Mac-Cullagh et de M. Newmann.

7. Dans son *Traité d'Optique physique*, M. Billet avait déjà remarqué qu'il n'est pas nécessaire d'apporter à la théorie de Fresnel les modifications profondes introduites par Mac-Cullagh et M. Newmann, pour ramener entre les limites des erreurs expérimentales les différences entre les résultats du calcul et ceux de l'observation. La modification qui place la vibration perpendiculaire au rayon lui paraît seule importante.

C'est cette modification qu'introduisent les hypothèses fondamentales de ce Mémoire.

Il est à peine nécessaire de faire remarquer qu'elles laissent, conformément à la théorie de Fresnel, la vibration perpendiculaire au plan de polarisation dans les milieux isotropes. La théorie de Mac-Cullagh et de M. Newmann la place au contraire dans ce plan.

8. En résumé, si on accepte comme rigoureuses les considérations sur lesquelles reposent les équations de condition données par Cauchy,

on est conduit à admettre que la théorie opposée à celle de Fresnel a abordé le problème à l'aide de deux hypothèses physiquement fausses, qui, par suite d'une compensation, ont fourni un résultat définitif conforme à la réalité.

Bien que donnant des formules moins exactes, les principes fondamentaux de Fresnel paraissent plus voisins de la vérité; et c'est parce que la théorie que nous exposons ici apporte à ces principes la modification nécessaire pour supprimer toute discordance avec les faits que nous croyons à la réalité physique du principe introduit.

9. Terminons par une dernière observation. Les équations auxquelles nous sommes parvenus pour représenter les propriétés optiques des cristaux à deux axes, lorsque l'on néglige la dispersion, sont essentiellement distinctes de celles auxquelles satisfont les vibrations d'un système *homogène* d'atomes ou de molécules. Bien qu'elles ne renferment que trois paramètres, il est impossible de les faires rentrer dans les équations des vibrations des systèmes de points matériels données par Cauchy, ou même dans les équations à 36 indéterminées de M. Lamé.

Leur forme dérive essentiellement de la *constitution périodique* du milieu vibrant, c'est-à-dire d'un état statique qu'on ne peut expliquer simplement qu'en admettant qu'il est dû aux actions perturbatrices d'un second milieu différent. Ce résultat est important parce qu'il implique la nécessité de faire intervenir dans la production des phénomènes lumineux deux systèmes distincts qui ne peuvent être que la matière pondérable, et cet agent mystérieux et insaisissable, l'éther, que toutes les théories physiques s'accordent aujourd'hui à révéler à notre esprit comme l'élément le plus actif, le plus puissant de la force universelle.

Analyse.

10. Les généralités du Chapitre I[er] permettront d'établir rapidement les propriétés des oudes planes.

Conformement aux notations de ce Chapitre, ces propriétés seront déduites des intégrales simples correspondantes prises sous la forme

$$\frac{u}{P} = \frac{v}{Q} = \frac{w}{R} = e^{\alpha x + \beta y + \gamma z - \sigma t},$$

et les relations entre les constantes s'obtiendront, dans chaque cas, en écrivant P, Q, R au lieu de u, v, w dans chacun des groupes du tableau général, et en y considérant α, β, γ, σ comme des quantités, et non comme des symboles.

Suivant une remarque faite précédemment (Chap. Ier, n° **10**), nous supposerons constamment que le plan d'une onde évanescente est parallèle au plan à partir duquel elle s'éteint. En désignant alors par l, m, n les cosinus des angles que la normale à l'onde fait avec les axes, on aura

$$\alpha = kl, \quad \beta = km, \quad \gamma = kn;$$

et le rapport $\omega = \frac{\sigma}{k}$ sera réel ou imaginaire, suivant que l'onde ne sera pas ou sera évanescente. Dans le premier cas, il se réduira à la vitesse de propagation de l'onde.

Cela posé, nous passons à l'étude des cas particuliers.

Symétrie terbinaire.

11. Les équations relatives à ce cas sont les équations (5) du tableau. En y écrivant P, Q, R au lieu de u, v, w, il vient

$$(1) \quad \begin{cases} \sigma^2 P = f(k^2 P - \alpha\theta), \\ \sigma^2 Q = g(k^2 Q - \beta\theta), \\ \sigma^2 R = h(k^2 R - \gamma\theta), \end{cases}$$

où on suppose toujours $k^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, $\theta = \alpha P + \beta Q + \gamma R$.

Éliminant P, Q, R, on obtient l'équation caractéristique

$$(2) \quad \frac{f\alpha^2}{\sigma^2 - fk^2} + \frac{g\beta^2}{\sigma^2 - gk^2} + \frac{h\gamma^2}{\sigma^2 - hk^2} + 1 = 0.$$

De plus, des équations (1), on déduit les rapports

$$(3) \quad \frac{P}{\left(\frac{f\alpha}{\sigma^2 - fk^2}\right)} = \frac{Q}{\left(\frac{g\beta}{\sigma^2 - gk^2}\right)} = \frac{R}{\left(\frac{h\gamma}{\sigma^2 - hk^2}\right)} = -\theta.$$

12. Si l'on pose actuellement dans les équations (2) et (3)

$$\alpha = kl, \quad \beta = km, \quad \gamma = kn, \quad \omega = \frac{\sigma}{k},$$

$$\varphi = lP + mQ + nR,$$

elles se transforment comme il suit

$$(4) \qquad \frac{fl^2}{\omega^2 - f} + \frac{gm^2}{\omega^2 - g} + \frac{hn^2}{\omega^2 - h} + 1 = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{P}{\left(\frac{fl}{\omega^2 - f}\right)} = \frac{Q}{\left(\frac{gm}{\omega^3 - g}\right)} = \frac{R}{\left(\frac{hn}{\omega^2 - h}\right)} = -\varphi.$$

Telles sont les équations d'où résultent les lois de la propagation et de la polarisation du mouvement.

L'équation (4) résolue par rapport à ω^2 admet évidemment deux racines positives et une racine nulle. Aux deux premières correspondent deux ondes se propageant sans s'affaiblir dans la même direction, avec des vitesses différentes.

Pour la racine $\omega^2 = 0$ les équations se réduisent aux suivantes

$$(6) \qquad \frac{P}{l} = \frac{Q}{m} = \frac{R}{n} = \varphi.$$

Ces équations correspondent à un mouvement simple *longitudinal;* mais la condition $\omega^2 = 0$ montre que ce mouvement ne peut se propager.

Les deux autres racines ω^2 sont fournies par l'équation

$$(7) \qquad \frac{l^2}{\omega^2 - f} + \frac{m^2}{\omega^2 - g} + \frac{n^2}{\omega^2 - h} = 0,$$

qui coïncide rigoureusement avec l'équation aux vitesses des ondes planes trouvée par Fresnel. Mais le mode de polarisation qui résulte alors des formules (5) diffère notablement de celui qui se déduit de la théorie de l'illustre physicien.

13. On voit d'abord que les quantités P, Q, R étant proportionnelles à des quantités réelles (Chap. I, n° **7**), la trajectoire ato-

mique se réduit à une ligne droite. La polarisation est donc *rectiligne*.

Pour la définir avec précision, il est utile de rappeler brièvement le calcul de la *surface des ondes*.

On sait que son équation s'obtient en cherchant l'enveloppe du plan

$$lx + my + nz = \omega, \tag{8}$$

les paramètres l, m, n, ω étant liés par l'équation (7) et la relation

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \tag{9}$$

D'après la théorie des enveloppes, on doit différentier successivement les équations (7), (8) et (9) par rapport aux deux paramètres laissés indépendants, on obtient ainsi les équations ci-dessous, où l'on a représenté, pour abréger, par $2F$ le premier membre de l'équation (7) :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} & x + z\frac{dn}{dl} - \frac{d\omega}{dl} = 0, \\ & l + n\frac{dn}{dl} = 0, \\ & \frac{dF}{dl} + \frac{dF}{dn}\frac{dn}{dl} + \frac{dF}{d\omega}\frac{d\omega}{dl} = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} & y + z\frac{dn}{dm} - \frac{d\omega}{dm} = 0, \\ & m + n\frac{dn}{dm} = 0, \\ & \frac{dF}{dm} + \frac{dF}{dn}\frac{dn}{dm} + \frac{dF}{d\omega}\frac{d\omega}{dm} = 0, \end{aligned}\right.$$

et l'équation de l'enveloppe s'obtient en éliminant les paramètres l, m, n, ω et les dérivées partielles de n et ω entre les équations (7), (8), (9), (10) et (11). On simplifie l'élimination, en substituant aux équations (10) et (11) les suivantes

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} & x + \lambda l + \mu\frac{dF}{dl} = 0, \\ & y + \lambda m + \mu\frac{dF}{dm} = 0, \\ & z + \lambda n + \mu\frac{dF}{dn} = 0, \\ & -1 + \mu\frac{dF}{d\omega} = 0. \end{aligned}\right.$$

En effet, l'élimination de λ et μ entre les équations (12) conduit au même résultat que l'élimination des dérivées partielles de n et ω entre les équations (10) et (11).

Ajoutons que les équations (12) déterminent les coordonnées x, y, z du point de contact de l'enveloppe avec le plan tangent et, par suite, la direction du *rayon lumineux* correspondant à l'onde plane qui se propage dans la direction (l, m, n).

14. Ajoutant les trois premières équations (12) respectivement multipliées 1° par $\frac{dF}{dl}, \frac{dF}{dm}, \frac{dF}{dn}$; 2° par l, m, n; 3° par x, y, z, et observant que l'on a $l\frac{dF}{dl} + m\frac{dF}{dm} + n\frac{dF}{dn} = 2F = 0$, il vient

$$x\frac{dF}{dl} + y\frac{dF}{dm} + z\frac{dF}{dn} + \mu\left[\left(\frac{dF}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dm}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dn}\right)^2\right] = 0,$$

$$\omega + \lambda = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \mu\left(x\frac{dF}{dl} + y\frac{dF}{dm} + z\frac{dF}{dn}\right) = 0.$$

Il est d'ailleurs aisé de voir que $\left(\frac{dF}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dm}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dn}\right)^2 = -\frac{1}{\omega}\frac{dF}{d\omega}$.

Observant de plus que $\mu\frac{dF}{d\omega} = 1$, et posant $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, les trois relations ci-dessus deviennent

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} & x\frac{dF}{dl} + y\frac{dF}{dm} + z\frac{dF}{dn} = \frac{1}{\omega}, \\ & \lambda = -\omega, \\ & \mu = -\omega(\rho^2 - \omega^2). \end{aligned}\right.$$

Portant les valeurs de λ et μ dans les équations (12) on a

$$(14) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= l\omega + \omega(\rho^2 - \omega^2)\frac{dF}{dl}, \\ y &= m\omega + \omega(\rho^2 - \omega^2)\frac{dF}{dm}, \\ z &= n\omega + \omega(\rho^2 - \omega^2)\frac{dF}{dn}; \end{aligned}\right.$$

ou bien

$$(15)\qquad \frac{x}{\rho^2 - f} = \frac{l\omega}{\omega^2 - f}, \quad \frac{y}{\rho^2 - g} = \frac{m\omega}{\omega^2 - g}, \quad \frac{z}{\rho^2 - h} = \frac{n\omega}{\omega^2 - h};$$

ajoutant enfin ces dernières équations, respectivement multipliées par x, y, z, et ayant égard à la première des équations (13), on obtient l'équation de la surface des ondes

$$(16)\qquad \frac{x^2}{\rho^2 - f} + \frac{y^2}{\rho^2 - g} + \frac{z^2}{\rho^2 - h} = 1.$$

15. Revenant actuellement aux équations (5), on voit que les projections du déplacement atomique sont proportionnelles aux quantités

$$\frac{fl}{\omega^2 - f}, \quad \frac{gm}{\omega^2 - g}, \quad \frac{hn}{\omega^2 - h},$$

que nous désignerons par X, Y, Z. On a d'ailleurs identiquement

$$(17)\qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{\omega^2 l}{\omega^2 - f} - l = \omega^2 \frac{dF}{dl} - l, \\ Y &= \frac{\omega^2 m}{\omega^2 - g} - m = \omega^2 \frac{dF}{dm} - m, \\ Z &= \frac{\omega^2 n}{\omega^2 - h} - n = \omega^2 \frac{dF}{dn} - n; \end{aligned} \right.$$

formules qui permettent, en ayant égard aux valeurs (13) de λ et μ, d'écrire les équations (14) comme il suit

$$(18)\qquad \left\{ \begin{aligned} x - \frac{\rho^2}{\omega} l + \frac{\mu}{\omega^2} X = 0, \\ y - \frac{\rho^2}{\omega} m + \frac{\mu}{\omega^2} Y = 0, \\ z - \frac{\rho^2}{\omega} n + \frac{\mu}{\omega^2} Z = 0. \end{aligned} \right.$$

Éliminant $\frac{\rho^2}{\omega}$ et $\frac{\mu}{\omega^2}$, on a la relation

$$(19)\qquad X(yn - zm) + Y(zl - xn) + Z(xm - yl) = 0,$$

qui montre que *la vibration, la normale à l'onde et le rayon lumineux sont dans un même plan.*

Ajoutant enfin les équations (18) respectivement multipliées par x, y, z on a immédiatement

$$xX + yY + zZ = 0, \tag{20}$$

relation qui montre *que la vibration est perpendiculaire au rayon lumineux.*

Ces deux propriétés définissent d'une manière simple la polarisation d'une onde plane dans un milieu biréfringent, et constituent un théorème remarquable dont voici l'énoncé :

Toute onde plane propagée par un milieu biréfringent est polarisée rectilignement. La direction de la vibration est comprise dans le plan déterminé par la normale à l'onde et le rayon lumineux correspondant. Elle est de plus perpendiculaire au rayon.

Symétries ternaire, quaternaire et sénaire.

16. En supposant $h = g$, on obtient les équations relatives aux mouvements simples propagés par les milieux à un axe.

Dans ce cas, les deux racines de l'équation (4) sont les suivantes :

$$\omega^2 = g, \tag{21}$$

$$\omega^2 = gl^2 + f(m^2 + n^2). \tag{22}$$

Le premier correspond au rayon *ordinaire* des physiciens, la seconde au rayon *extraordinaire*. Le mode de polarisation se déduit sans difficulté des équations (5) qui donnent :

1° Pour l'onde ordinaire

$$P = 0, \quad mQ + nR = 0; \tag{23}$$

2° Pour l'onde extraordinaire

$$\frac{P}{f(m^2 + n^2)} = \frac{Q}{-glm} = \frac{R}{-gln}. \tag{24}$$

Ces formules montrent que la vibration *ordinaire* est comprise dans le plan de l'onde. Mais il n'en est pas de même pour l'onde extraordinaire.

On trouve sans difficulté que l'angle V compris entre la vibration extraordinaire et le plan de l'onde est déterminé par la formule

$$(25) \qquad \sin V = \frac{1}{2} \frac{(f-g)\sin 2\tau}{\sqrt{f^2 \sin^2\tau + g^2 \cos^2\tau}},$$

en appelant τ l'angle que la normale à l'onde fait avec l'axe principal de symétrie.

L'observation indique que g diffère généralement fort peu de f. L'angle V est donc très-petit, mais il n'est pas nul comme le supposait Fresnel.

Pour le spath, on trouve, en donnant aux coefficients f, g les valeurs que leur attribue l'expérience, que, pour $\tau = \frac{\pi}{4}$, l'inclinaison de la vibration extraordinaire sur l'onde est de 6° 12'. Pour l'azotate de soude, qui est très-biréfringent, sa valeur s'élève à 9° 38'.

17. Il ne reste plus qu'à mentionner les phénomènes optiques des cristaux du système cubique. En ne conservant dans les équations que les termes du second ordre, ces phénomènes sont identiques à ceux qui se produisent dans le vide et dans les corps isotropes. La double réfraction disparaît, et la vitesse de propagation est seule modifiée par l'action de la matière pondérable sur l'éther.

CHAPITRE V.

SUR LES PROPRIÉTÉS DES ONDES PLANES DE L'ÉTHER RENFERMÉ DANS UN MILIEU HÉMIÉDRIQUE.

1. Parmi les phénomènes lumineux qui offrent le plus d'intérêt, on doit citer ceux que présentent le quartz, le sulfate de strychnine et quelques cristaux du système cubique.

Les cristaux de quartz et de sulfate de strychnine appartiennent, les premiers au système rhomboédrique, les seconds au système du prisme

droit à base carrée. Ils présentent donc un *axe principal de symétrie*, sénaire pour le quartz, quaternaire pour le sulfate de strychnine.

Ces cristaux possèdent la propriété de transmettre, parallèlement à l'axe principal, deux systèmes d'ondes polarisées circulairement et se propageant avec des vitesses différentes. Les phénomènes constatés dans les ondes transmises dans une direction perpendiculaire à l'axe ne diffèrent pas sensiblement de ceux qui se produisent dans les cristaux biréfringents homoédriques, tels que le spath.

2. La double réfraction circulaire donne lieu au phénomène connu sous le nom de *rotation du plan de polarisation*. Ce phénomène, que le quartz et le sulfate de strychnine présentent dans une direction parallèle à l'axe principal de symétrie, est produit dans toutes les directions par certains cristaux du système cubique, le chlorate de soude par exemple.

3. Les faits que nous venons de rappeler sont d'une haute importance, et ont depuis longtemps attiré l'attention des physiciens et des géomètres. D'après les découvertes de M. Pasteur, ils sont toujours associés à une certaine dissymétrie de la forme cristalline. Dans ses *Études cristallographiques*, Bravais a précisé le genre de dissymétrie qui est l'origine de ces phénomènes, en énonçant ce fait remarquable que *tous les cristaux connus jusqu'à ce jour comme doués du pouvoir rotatoire optique, appartiennent à la catégorie des cristaux hémisymétriques* [*].

Nous verrons, en effet, que tous les faits constatés par l'expérience et les lois qui le régissent se déduisent des équations relatives aux *cristaux hémisymétriques* possédant un axe principal de symétrie.

4. Les lois qui dérivent des équations propres aux cristaux dichosymétriques sont fort différentes.

La polarisation n'est jamais circulaire : elle est toujours rectiligne ou faiblement elliptique. Ce qui semble caractériser la *dichosymétrie*, c'est l'extinction plus ou moins grande de certaines radiations lumineuses.

---

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, 34e cahier, p. 222.

Les équations indiquent, par exemple, que les cristaux *dichosymétriques* du système *ternaire* ne peuvent transmettre que des ondes évanescentes parallèlement à l'axe principal de symétrie, et que des deux ondes propagées dans une direction perpendiculaire à l'axe, l'onde extraordinaire se propage sans s'affaiblir, et l'onde ordinaire est généralement évanescente.

Ces résultats de la théorie se constatent effectivement sur la tourmaline, dont les cristaux appartiennent à l'*hémiaxie dichosymétrique du système ternaire* [*]. On sait, en effet, qu'une plaque de tourmaline taillée perpendiculairement à l'axe éteint plus complétement la lumière qu'une plaque de même épaisseur taillée parallèlement à l'axe [**], et qu'une plaque à faces parallèles à l'axe, d'une assez faible épaisseur, éteint généralement le rayon ordinaire, et laisse passer le rayon extraordinaire.

5. Les équations relatives au sulfate de strychnine sont les équations (12) du tableau.

Celles du quartz sont en réalité les équations (9). En effet, bien que le quartz appartienne au système sénaire, ses cristaux sont *hémiaxes*, et la symétrie de sa molécule représentée par le symbole

$$(\Delta^3, 3L^2, oC, oP)$$

est *ternaire* [***]. Mais les termes par lesquels le système (9) diffère du système (12) sont évidemment négligeables quand les rayons transmis sont peu inclinés sur l'axe. Or, ces rayons seuls offrent des particularités importantes : on pourra par suite déduire les propriétés du quartz des équations (12).

Enfin les systèmes (10) et (15) du tableau correspondent à la tourmaline et à ceux des cristaux du système cubique (chlorate et bromate de soude, acétate d'urane, etc.) qui, d'après les expériences de M. Marbach, possèdent le pouvoir rotatoire.

---

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, 34e cahier, p. 244.

[**] Voir la *Cristallographie* de M. Des Cloizeaux.

[***] *Journal de l'École Polytechnique*, 34e cahier, p. 240.

6. Nous ajouterons que le tableau comprend aussi (système n° **6**) les équations qui régissent les phénomènes optiques des cristaux hémisymétriques du système prismatique.

Ces équations sont assez simples, et ne renferment qu'un assez petit nombre de paramètres indéterminés.

Il sera intéressant de rechercher les lois qui s'en déduisent pour les comparer aux faits d'expérience auxquels donnent lieu certains cristaux, tels que le *formiate de strontiane,* étudié par M. Violette, l'asparagine, le glucosate de sel marin, etc., qui remplissent, suivant Bravais, les conditions de symétrie dont il s'agit.

Nous essayerons de le faire dans un autre travail. En se limitant aux faits qui ont été signalés précédemment, et à ceux qui font l'objet du Chapitre précédent, la théorie nous semble offrir un accord avec l'observation assez satisfaisant pour que les principes qui lui servent de base paraissent dignes de l'attention des physiciens

Les relations nouvelles qu'elle établit entre les phénomènes optiques des corps et leur forme cristalline nous paraissent particulièrement importantes, parce que leur vérification expérimentale doit être considérée comme une confirmation, non-seulement de la théorie des ondes, mais encore des conceptions sur lesquelles repose, dans l'état actuel de la science, l'explication des phénomènes et des lois cristallographiques.

Analyse.

7. *Holoaxie hémisymétrique des systèmes quaternaire et sénaire.* — Écrivant P, Q, R au lieu de u, v, w dans les équations (12) du Chapitre III, et posant dans les mêmes équations

$$\omega = \frac{\sigma}{k},\quad \alpha = kl,\quad \beta = km,\quad \gamma = kn,$$
$$\varphi = l\mathrm{P} + m\mathrm{Q} + n\mathrm{R},$$
$$\varepsilon = \omega^2 - f,\quad \varepsilon' = \omega^2 - g,$$

on obtient le système suivant :

$$(1)\qquad \begin{cases} \varepsilon\mathrm{P} = -fl\varphi + f_1 k(m\mathrm{R} - n\mathrm{Q}), \\ \varepsilon'\mathrm{Q} = -gm\varphi - k(g_1 n\mathrm{P} + g_2 l\mathrm{R}), \\ \varepsilon'\mathrm{R} = -gn\varphi + k(g_1 m\mathrm{P} + g_2 l\mathrm{Q}). \end{cases}$$

Par suite, P, Q, R, φ sont respectivement proportionnels aux quantités

$$f l \varepsilon'^2 + g_2 k^2 l [f g_2 l^2 + g f_1 (m^2 + n^2)],$$
$$g m \varepsilon\varepsilon' - k l n (g g_2 \varepsilon + f g_1 \varepsilon') - g_1 k^2 m [f g_2 l^2 + g f_1 (m^2 + n^2)],$$
$$g n \varepsilon\varepsilon' + k l m (g g_2 \varepsilon + f g_1 \varepsilon') - g_1 k^2 n [f g_2 l^2 + g f_1 (m^2 + n^2)],$$
$$- \varepsilon\varepsilon'^2 - g_2^2 k^2 l^2 \varepsilon + f_1 g_1 k^2 (m^2 + n^2) \varepsilon'.$$

Je pose

$$(2) \quad \begin{cases} A = g_2 l^2 + f_1 (m^2 + n^2), \\ B = g_2 l^2 - g_1 (m^2 + n^2), \\ \Delta = g g_2 \varepsilon + f g_1 \varepsilon', \\ \delta = g - f, \end{cases}$$

et je néglige le produit de deux paramètres f_1, g_1, g_2 multiplié par une des différences δ, ε, ε'; je trouve ainsi : 1° les rapports

$$(3) \quad \frac{P}{f l (\varepsilon'^2 + g_2 k^2 A)} = \frac{Q}{g m (\varepsilon\varepsilon' - g_1 k^2 A) - k l n \Delta} = \frac{R}{g n (\varepsilon\varepsilon' - g_1 k^2 A) + k l m \Delta} = \frac{\varphi}{-\varepsilon\varepsilon'^2};$$

2° l'équation caractéristique

$$(4) \quad \varepsilon'^2 + \delta (m^2 + n^2) \varepsilon' + k^2 AB = 0.$$

8. Soit τ l'angle que la normale à l'onde plane fait avec l'axe de symétrie, on aura

$$l = \cos\tau, \quad \sqrt{m^2 + n^2} = \sin\tau,$$
$$A = g^2 \cos^2\tau + f_1 \sin^2\tau, \quad B = g_2 \cos^2\tau - g_1 \sin^2\tau,$$

et l'équation (4), résolue par rapport à ε', fournira les deux valeurs

$$2\varepsilon' = - \delta \sin^2\tau \pm \sqrt{\delta^2 \sin^4\tau - 4 k^2 AB},$$

le signe + correspondant à l'onde ordinaire et le signe — à l'onde extraordinaire.

Dans ces valeurs on peut, avec une approximation suffisante, remplacer k sous le radical par la valeur approchée $\sqrt{g}\,\sigma$ ou $\sqrt{g}\,si$, et

l'on obtient ainsi

$$(5)\qquad 2\varepsilon' = -\delta \sin^2\tau \pm \sqrt{\delta^2 \sin^4\tau + 4gs^2 AB}.$$

On voit aisément que, pour des rayons peu inclinés sur l'axe, les deux valeurs de ω qui résultent de la formule (5) sont réelles : par suite, les deux ondes se propagent sans extinction.

9. Par suite aussi, la valeur de k, correspondant à chacune des deux ondes, est imaginaire de la forme hi. Les rapports (3) peuvent donc s'écrire

$$(6)\qquad \frac{P}{fl(\varepsilon'^2 - g_2 h^2 A)} = \frac{Q}{gm(\varepsilon\varepsilon' + g_1 h^2 A) - hln\Delta i} = \frac{R}{gn(\varepsilon\varepsilon' + g_1 h^2 A) + hlm\Delta i} = \frac{\varphi}{-\varepsilon\varepsilon'^2}.$$

Ces expressions peuvent être transformées à l'aide de l'équation (4). On tire, en effet, de cette équation

$$\varepsilon'^2 - g_2 h^2 A = -(m^2 + n^2)[\delta\varepsilon' + h^2(g_1 + g_2)A],$$
$$\varepsilon\varepsilon' + g_1 h^2 A = \qquad l^2 \qquad [\delta\varepsilon' + h^2(g_1 + g_2)A];$$

par suite, en posant

$$(7)\qquad \lambda = \delta\varepsilon' + h^2(g_1 + g_2)A,$$

il viendra

$$(8)\qquad \frac{P}{-fl(m^2 + n^2)\lambda} = \frac{Q}{gml^2\lambda - hln\Delta i} = \frac{R}{gnl^2\lambda + hlm\Delta i} = \frac{\varphi}{-\varepsilon\varepsilon'^2},$$

ou bien, en désignant par τ l'angle que fait avec l'axe des x la normale à l'onde, et par ω l'azimut de cette ligne compté à partir du plan xoy,

$$(9)\qquad \frac{P}{-f\sin\tau\,\lambda} = \frac{Q}{g\cos\omega\cos\tau\,\lambda - h\sin\omega\Delta i} = \frac{R}{g\sin\omega\cos\tau\,\lambda + h\cos\omega\Delta i}.$$

La polarisation qui résulte de ces formules est généralement elliptique. Pour étudier les lois de cette polarisation, nous négligerons le produit de deux des quantités f_1, g_1, g_2, et même celui d'une de ces

quantités par δ ou un paramètre de même ordre. En admettant cette approximation, on a les réductions suivantes.

10. *Onde extraordinaire.* — Nous réduisons les valeurs (7) et (2) de λ et Δ aux suivantes :

$$\lambda = \delta\varepsilon',$$
$$\Delta = g\,(g_2\,\varepsilon + g_1\,\varepsilon'),$$

et y remplaçons, au même degré d'approximation, ε, ε' par leurs valeurs approchées

$$\varepsilon = \delta\cos^2\tau, \quad \varepsilon' = -\,\delta\sin^2\tau,$$

de sorte que

$$\Delta = g\delta\,(g_2\cos^2\tau - g_1\sin^2\tau) = g\delta B.$$

Par suite, les formules (9) deviennent

$$(10) \qquad \frac{P}{-f\sin\tau\,\varepsilon'} = \frac{Q}{g\,(\cos\omega\cos\tau\,\varepsilon' - h\sin\omega\,Bi)} = \frac{R}{g\,(\sin\omega\cos\tau + h\cos\omega\,\Delta i)}.$$

Tous les éléments de la trajectoire elliptique se déduisent comme on l'a observé (Chapitre I, n° 5) de la quantité $P^2 + Q^2 + R^2$, qui se réduit, dans le cas actuel, à la suivante :

$$Me^{\theta i} = \varepsilon'^2(f^2\sin^2\tau + g^2\cos^2\tau) - g^2h^2B^2,$$

d'où l'on tire évidemment

$$(11) \qquad \begin{cases} M = \varepsilon'^2(f^2\sin^2\tau + g^2\cos^2\tau) - g^2h^2B^2, \\ \theta = 0. \end{cases}$$

De plus, l'intensité du mouvement est donnée par la formule

$$(12) \qquad I = \varepsilon'^2(f^2\sin^2\tau + g^2\cos^2\tau) + g^2h^2B^2.$$

On aura donc, pour la valeur $\rho = \sqrt{\frac{I-M}{I+M}}$ du rapport du petit axe au grand

$$(13) \qquad \rho = \frac{ghB}{\varepsilon'\sqrt{f^2\sin^2\tau + g^2\cos^2\tau}},$$

ou, approximativement,

$$\rho = \frac{hB}{\varepsilon'}. \tag{14}$$

L'argument θ se réduisant à zéro, les projections du demi-petit axe sont représentées par les coefficients de i dans P, Q, R. D'après les valeurs (10), ces projections sont proportionnelles à

$$0, \quad \sin\omega, \quad -\cos\omega,$$

d'où l'on déduit immédiatement :

Que le petit axe de l'ellipse est perpendiculaire à l'axe principal de symétrie et est compris dans le plan de l'onde, de sorte qu'il est perpendiculaire au plan déterminé par la normale à l'onde plane et l'axe de symétrie.

Pour achever de déterminer les éléments du mouvement elliptique, il suffit de calculer l'angle V que le plan de la trajectoire fait avec le plan de l'onde. On obtient cet angle en déduisant préalablement des formules (10) les cosinus des angles que la normale au plan des deux axes de l'ellipse fait avec les angles des coordonnées. On trouve ainsi

$$\sin V = \frac{1}{2} \frac{(g-f)\sin^2\tau}{\sqrt{f^2\sin^2\tau + g^2\cos^2\tau}}.$$

Par suite, au degré d'approximation adopté, l'angle du plan de l'ellipse avec l'onde plane extraordinaire se confond avec celui que forme, dans les cristaux homoédriques, la vibration rectiligne extraordinaire avec le plan de l'onde.

11. *Onde ordinaire.* — Désignant par ε'_1 la racine de l'équation (4) qui correspond à l'onde ordinaire, et par ε' celle qui se rapporte à l'onde extraordinaire, on a

$$\varepsilon'\varepsilon'_1 = -h^2 AB.$$

Par suite, la valeur (7) de λ relative à l'onde extraordinaire peut être

mise sous la forme

$$\lambda = \frac{-\delta h^2 AB + \varepsilon' h^2 (g_1 + g_2) A}{\varepsilon'}.$$

Remplaçant au numérateur ε' par sa valeur approchée $-\delta \sin^2\tau$ et B par sa valeur $g_2 \cos^2\tau - g_1 \sin^2\tau$, on obtient

$$(15) \qquad \lambda = -\frac{\delta h^2 g_2 A}{\varepsilon'}.$$

Quant à la valeur de Δ, elle peut être réduite dans l'approximation adoptée à

$$(16) \qquad \Delta = g g_2 \delta.$$

En tenant compte des valeurs (15) et (16) de λ et Δ, les rapports (9) deviennent

$$(17) \qquad \frac{P}{-fh\sin\tau A} = \frac{Q}{g(h\cos\omega\cos\tau A + \varepsilon'\sin\omega i)} = \frac{R}{g(h\sin\omega\cos\tau A - \varepsilon'\cos\omega i)}.$$

La quantité $P^2 + Q^2 + R^2$ devient alors

$$h^2 A^2 (f^2 \sin^2\tau + g^2 \cos^2\tau) - g^2 \varepsilon'^2,$$

de sorte que l'on a

$$(18) \qquad \begin{cases} M = g^2 \varepsilon'^2 - h^2 A^2 (f^2 \sin^2\tau + g^2 \cos^2\tau), \\ \theta = \pi. \end{cases}$$

Dans ce cas, le rapport du petit axe au grand est donné par la formule

$$(19) \qquad \rho = \frac{g\varepsilon'}{hA\sqrt{f^2\sin^2\tau + g^2\cos^2\tau}},$$

ou approximativement

$$(20) \qquad \rho = \frac{\varepsilon'}{hA}.$$

L'argument θ étant égal à π, on aura $e^{-\frac{i\theta}{2}} = -i$. Donc d'après le

théorème général du Chapitre I les projections du demi-grand axe sont les parties réelles des trois quantités que l'on obtient en multipliant par $-i$ les quantités auxquelles les constantes P, Q, R sont proportionnelles d'après les relations (17). On en conclut que la direction du grand axe de la trajectoire elliptique ordinaire coincide avec le petit axe de la trajectoire elliptique extraordinaire.

12. Le sens du mouvement elliptique dans chacun des deux rayons dépend, comme on l'a vu (Chap. I, n° **8**), du signe du coefficient de i dans le rapport $\frac{Q}{P}$. Ce coefficient est égal à $\frac{gh \sin\omega}{f \sin\tau} \frac{B}{\varepsilon'}$, pour le rayon extraordinaire, et à $-\frac{g \sin\omega}{fh \sin\tau} \frac{\varepsilon'}{A}$ pour le rayon ordinaire. D'ailleurs, pour des valeurs de τ voisines de zéro, le signe de B et celui de A sont égaux à celui de $g_2 \cos^2\tau$. Donc, le mouvement elliptique s'effectue en sens inverse dans les ondes ordinaire et extraordinaire.

13. En résumé, on voit que dans les cristaux hémisymétriques qui ont un axe principal :

1° Deux ondes planes peuvent se propager dans la même direction avec des vitesses différentes données par la formule

$$\omega^2 = g - \frac{\delta \sin^2\tau}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2 \sin^4\tau}{4} + gs^2 AB}, \tag{21}$$

le signe + appartenant à l'onde ordinaire, et le signe — à l'onde extraordinaire;

2° Les deux ondes planes qui peuvent se propager dans une direction inclinée sur l'axe principal sont polarisées elliptiquement.

Le grand axe de la vibration ordinaire est perpendiculaire à la section principale. Le plan de la trajectoire se confond avec celui de l'onde.

La direction du petit axe de la vibration extraordinaire se confond avec celle du grand axe de la vibration ordinaire. Le plan de la trajectoire fait avec le plan de l'onde un angle très-petit déterminé par la formule

$$\sin V = \frac{1}{2} \frac{\delta \sin^2\tau}{\sqrt{f^2 \sin^2\tau + g^2 \cos^2\tau}}, \tag{22}$$

3° Le rapport du petit axe au grand, dans les ondes ordinaire et extraordinaire, est donné par les formules

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} \rho &= \frac{\varepsilon'}{h\,(g_2 \cos^2\tau + f_1 \sin^2\tau)}, \\ \rho' &= \frac{h\,(g_2 \cos^2\tau - g_1 \sin^2\tau)}{\varepsilon'}, \\ 2\varepsilon' &= -\,\delta \sin^2\tau - \sqrt{\delta^2 \sin^2\tau + 4 g s^2 (g_2 \cos^2\tau + f_1 \sin^2\tau)(g_2 \cos^2\tau - g_1 \sin^2\tau)}. \end{aligned} \right.$$

Le rapport des axes diminue à mesure que la direction des ondes s'éloigne de l'axe principal.

Pour les ondes dont la direction est peu inclinée sur l'axe, les deux valeurs de ρ satisfont sensiblement à la relation

$$\rho\rho' = 1.$$

Enfin, les deux ondes sont polarisées en sens contraires.

14. En supposant $\tau = 0$, les formules (23) donnent $\varepsilon' = h g_2 \cos^2\tau$, $\rho = \rho' = 1$. Donc les ondes propagées parallèlement à l'axe principal de symétrie sont polarisées *circulairement*.

Il est remarquable que ce résultat soit indépendant de toute hypothèse sur la constitution de l'éther, et soit la conséquence nécessaire de la modification particulière de la forme cristalline que Bravais a désignée sous le nom d'hémisymétrie.

Si on considère, en effet, les équations générales des vibrations de l'éther renfermé dans un cristal hémisymétrique doué d'un axe principal de symétrie, sous la forme que nous leur avons trouvée dans notre premier Mémoire, on voit qu'elles se réduisent aux suivantes pour les ondes perpendiculaires à l'axe

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} \sigma^2 u &= f_1 u, \\ \sigma^2 v &= g_2 v - G_2 \alpha w, \\ \sigma^2 w &= g_2 w + G_2 \alpha v; \end{aligned} \right.$$

f_1, g_2, G_2 désignant nécessairement des fonctions de α^2. Par suite, les propriétés des ondes planes se déduisent des relations obtenues en

écrivant P, Q, R au lieu de *u*, *v*, *w* dans les équations ci-dessus. Or, si on ajoute ces relations respectivement multipliées par P, Q, R, on obtient la condition nécessaire et suffisante de la polarisation circulaire $P^2 + Q^2 + R^2 = 0$.

15. M. Airy a démontré le premier que dans le quartz les rayons inclinés sur l'axe sont polarisés elliptiquement. Il a montré que les faits observés s'expliquent en admettant que les vibrations s'exécutent en sens inverse suivant deux ellipses dont les grands axes sont à angle droit, et qui s'allongent de plus en plus quand la direction des rayons s'éloigne de l'axe [*].

Les formules de la théorie confirment cette hypothèse, et donnent le rapport des axes dans chaque ellipse et la différence de marche des deux rayons. Elles concordent avec celles que Cauchy a données pour les rayons peu inclinés sur l'axe, et que M. Jamin a vérifiées par ses belles recherches expérimentales [**].

16. *Hémiaxie dichosymétrique du système ternaire*. — On déduit des équations (10) du tableau (Chap. III), le système suivant

$$(25)\quad \begin{cases} \varepsilon P = -fl\varphi + f_1 k(mQ + nR), \\ \varepsilon' R = -gm\varphi + k(g_1 mP + g_2 lQ) + h_1 k(mQ - nR), \\ \varepsilon' Q = -gn\varphi + k(g_1 nP + g_2 lR) - h_1 k(mR + nQ). \end{cases}$$

En négligeant les produits deux à deux des coefficients des termes du troisième ordre, on peut remplacer dans ces termes P, Q, R par les valeurs que prennent ces quantités, quand on ne prend que les termes du second ordre.

En opérant ainsi, on obtient le résultat que voici :

17. 1° *Onde ordinaire*. — Une première approximation donne

$$P = 0, \quad \varphi = 0.$$

---

[*] Transactions de Cambridge, 1832.

[**] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXX.

Introduisant ces valeurs dans les termes du troisième ordre, il vient

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon P &= -fl\varphi \\ \varepsilon' Q &= -gm\varphi + g_2 klQ + h_1 k(mQ - nR), \\ \varepsilon' R &= -gn\varphi + g_2 klR - h_1 k(mR + nQ). \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, au même degré d'approximation, on déduit de l'équation $mQ + nR = 0$, les relations

$$\frac{Q}{n} = \frac{R}{-m} = \frac{mQ - nR}{2mn} = \frac{mR + nQ}{-m^2 + n^2} = \frac{nQ - mR}{m^2 + n^2},$$

qui permettent d'écrire la deuxième et la troisième des équations (26), sous la forme suivante

$$\varepsilon' Q = -gm\varphi + g_2 klQ + h_1 k \frac{2mn}{m^2 + n^2}(nQ - mR),$$

$$\varepsilon' R = -gn\varphi + g_2 klR + h_1 k \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}(nQ - mR).$$

En multipliant la première de ces nouvelles équations par n, la deuxième par m, et retranchant les résultats l'un de l'autre, on a l'équation caractéristique

$$(27)\quad \omega^2 = g + g_2 kl + h_1 k \frac{3mn^2 - m^3}{m^2 + n^2}.$$

18. 2° *Onde extraordinaire.* — Multiplions la première équation (26) par ε, et les deux autres par ε'. Dans les résultats, substituons aux P, Q, R des termes du troisième ordre ainsi qu'à ε, ε' leurs valeurs approchées tirées des formules (21), (22) et (24) du Chapitre IV. Négligeons enfin les produits de f_1, g_1, g_2, h_1 par $\delta = g - f$. Il vient

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon\varepsilon' P &= -[fl\varepsilon' + gf_1 k(m^2 + n^2)]\varphi, \\ \varepsilon\varepsilon' Q &= -\left[gm\varepsilon + gg_1 klm + gg_2 k\frac{l^2 m}{m^2 + n^2} + gh_1 k\frac{l^2(m^2 - n^2)}{m^2 + n^2}\right]\varphi, \\ \varepsilon\varepsilon' R &= -\left[gn\varepsilon + gg_1 kln + gg_2 k\frac{l^2 n}{m^2 + n^2} - gh_1 k\frac{2l^2 mn}{m^2 + n^2}\right]\varphi, \end{aligned}\right.$$

et on en déduit l'équation caractéristique

$$(29)\quad \omega^2 = f + \delta l^2 - (f_1 + g_1) kl(m^2 + n^2) + g_2 kl^3 + h_1 k \frac{l^2(m^3 - 3mn^2)}{m^2 + n^2}.$$

19. Soit τ l'angle de la normale à l'onde avec ox, et ω son azimut.

$$l = \cos\tau, \quad m = \sin\tau\cos\omega, \quad n = \sin\tau\sin\omega,$$

les équations (27) et (29) deviennent

$$(30)\qquad \omega^2 = g + k(g_2\cos\tau - h_1\sin\tau\cos 3\omega),$$

$$(31)\quad \begin{cases} \omega^2 = f + \delta\cos^2\tau \\ \quad + k\cos\tau[g_2\cos^2\tau - (f_1 + g_1)\sin^2\tau + h_1\sin\tau\cos\tau\cos 3\omega]. \end{cases}$$

Pour qu'une onde plane persistante se propage sans s'affaiblir, il faut que k soit de la forme hi et la valeur de ω réelle. Or les équations (30) et (31) ne peuvent être satisfaites par de pareilles valeurs de k et ω. Les ondes sont donc généralement évanescentes.

Mais si on suppose $\cos\tau = 0$, c'est-à-dire si le plan de l'onde est parallèle à l'axe principal, le coefficient de k s'annule dans l'équation (31). Dans la même hypothèse, il ne s'annule pas dans l'équation (30).

Donc une *onde plane ordinaire* parallèle à l'axe est généralement évanescente, et une *onde plane extraordinaire* peut se propager sans s'affaiblir.

Une onde plane ordinaire peut cesser d'être évanescente, d'après la formule (30), quand on a $\cos\tau = 0$, $\cos 3\omega = 0$, c'est-à-dire quand elle est parallèle à l'axe principal et perpendiculaire à un des trois plans de symétrie de l'assemblage. Il serait intéressant de rechercher expérimentalement les phénomènes que présente une tourmaline dans ces conditions.

20. *Holoaxie hémisymétrique du système terquaternaire*. [Équations (15) du tableau]. — Les propriétés des ondes planes résultent des équations

$$(32)\quad \begin{cases} (\omega^2 - f)P = -fl\varphi + f_1 k(nQ - mR), \\ (\omega^2 - f)Q = -fm\varphi + f_1 k(lR - nP), \\ (\omega^2 - f)R = -fn\varphi + f_1 k(mP - lQ). \end{cases}$$

En ajoutant ces équations multipliées par l, m, n, il vient

$$\omega^2\varphi = 0$$

d'où $\omega^2 = 0$ ou bien $\varphi = 0$. Cette dernière condition est celle des ondes lumineuses. En l'introduisant dans (32), on a

$$(33) \qquad \begin{cases} (\omega^2 - f)\,P = f_1 k\,(nQ - mR), \\ (\omega^2 - f)\,Q = f_1 k\,(lR - nP), \\ (\omega^2 - f)\,R = f_1 k\,(mP - lQ). \end{cases}$$

Des deux premières équations (3), on tire les relations

$$(34) \qquad \frac{P}{f_1^2 k^2 ln - (\omega^2 - f) f_1 km} = \frac{Q}{f_1^2 k^2 mn + (\omega^2 - f) f_1 kl} = \frac{R}{f_1^2 k^2 n^2 + (\omega^2 - f)^2},$$

qui, en ayant égard à $lP + mQ + nR = 0$ donnent l'équation caractéristique

$$(35) \qquad (\omega^2 - f)^2 + f_1^2 k^2 = 0$$

qui pour une valeur de k de la forme hi fournit deux valeurs réelles de ω. Le milieu propage donc sans extinction, avec des vitesses différentes, deux ondes planes dans la même direction.

21. La polarisation se déduit immédiatement des équations (33) qui entrainent la relation $P^2 + Q^2 + R^2 = 0$. Elle est donc *circulaire*.

D'ailleurs, en tenant compte de l'équation (35), les relations (34) deviennent

$$(36) \qquad \frac{P}{ln \mp mi} = \frac{Q}{mn \pm li} = \frac{R}{n^2 - 1}.$$

Le signe du coefficient de i dans le rapport $\frac{Q}{R}$ change donc quand on passe d'une des deux ondes à l'autre. Par suite, les deux ondes sont polarisées en sens contraires.

En résumé, les cristaux holoaxes hémisymétriques du système terquaternaire propagent dans toutes les directions deux ondes planes polarisées ciculairement en sens inverse et possédant des vitesses de propagation différentes. De là résulte le pouvoir rotatoire.

[Extrait du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, tome XIII, 1868.]

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER, rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

SUR LES

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

QUADRUPLEMENT PÉRIODIQUES

DE TROISIÈME ESPÈCE,

PAR M. P. APPELL.

1. En suivant la classification employée par M. Hermite pour les fonctions doublement périodiques d'une variable, nous appellerons *fonction quadruplement périodique de troisième espèce* une fonction uniforme de deux variables x et y qui se reproduit, multipliée par une exponentielle linéaire en x et y, quand on augmente les variables de chacune des quatre paires de périodes. Nous supposons essentiellement que l'on ne puisse pas, en multipliant cette fonction par une exponentielle de la forme

$$e^{Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey},$$

la ramener à être quadruplement périodique de première ou de seconde espèce, c'est-à-dire à se reproduire multipliée par l'unité ou par une constante quelconque, quand on ajoute aux variables chacune des quatre paires de périodes.

On sait, d'après un théorème énoncé par Riemann et confirmé par M. Weierstrass [1], qu'une fonction quadruplement périodique de

[1] MM. Picard et Poincaré ont démontré ce théorème par des considérations empruntées à la théorie des intégrales abéliennes (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 3 décembre 1883). J'ai indiqué depuis (*Comptes rendus,* 27 janvier 1890), pour démontrer ce même théorème, une méthode plus directe, qui a de nombreux points communs avec celle que j'emploie dans le présent travail.

deux variables, de première espèce, qui n'a pas de singularités essentielles à distance finie, peut toujours être ramenée à avoir pour paires de périodes les quantités

$$(2\pi i, 0),\quad (0, 2\pi i),\quad (\alpha, \beta),\quad (\alpha', \beta'),$$

vérifiant la relation

$$\beta = \alpha'.$$

Si la fonction admet des singularités essentielles, les paires de périodes (α, β) et (α', β') sont entièrement arbitraires. M. Picard a donné des exemples de fonctions de ce genre ([1]).

A cet égard, il y a, entre les fonctions quadruplement périodiques de deux variables de première et de deuxième espèce d'une part, et de troisième espèce d'autre part, cette différence remarquable que, même si une fonction de troisième espèce admet des singularités essentielles, on peut toujours ramener ses périodes à être

$$(2\pi i, 0),\quad (0, 2\pi i),\quad (\alpha, \beta),\quad (\alpha', \beta')$$

avec la relation de Riemann,

$$\beta = \alpha'.$$

Le présent travail est principalement consacré à la démonstration de ce théorème, que je me suis borné à énoncer dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 25 mars 1889. Il contient, en outre, quelques exemples généraux de fonctions ou expressions de deux variables quadruplement périodiques de troisième espèce.

2. Étant donnée une fonction quadruplement périodique de troisième espèce, on peut toujours, par un changement linéaire de variables, ramener les quatre paires de périodes à avoir la forme

$$(2\pi i, 0),\quad (0, 2\pi i),\quad (\alpha, \beta),\quad (\alpha', \beta').$$

Soit alors $F(x, y)$ une fonction quadruplement périodique de troi-

([1]) *Comptes rendus*, 1er semestre 1889; *Bulletin de la Société mathématique*, t. XVII, p. 131; 1889.

sième espèce admettant ces quatre paires de périodes, on aura d'abord

$$(1)\quad \begin{cases} F(x+2\pi i, y) = e^{px+qy+r}\ F(x, y), \\ F(x, y+2\pi i) = e^{p'x+q'y+r'} F(x, y), \end{cases}$$

p, q, r, p', q', r' désignant des constantes; puis on aura deux autres relations de la même forme pour les deux autres paires de périodes. En ajoutant $2\pi i$ à y dans la première de ces relations (1) et tenant compte de la seconde, on a

$$F(x+2\pi i, y+2\pi i) = e^{(p+p')x+(q+q')y+r+r'+2q\pi i} F(x, y);$$

ajoutant de même $2\pi i$ à x dans la seconde des relations (1) et tenant compte de la première, on trouve une nouvelle expression de

$$F(x+2\pi i, y+2\pi i)$$

qui, par comparaison avec la précédente, donne

$$e^{2q\pi i} = e^{2p'\pi i}, \qquad p' = q+n,$$

n désignant un entier. Soit $\varphi(x, y)$ une exponentielle de la forme

$$\varphi(x, y) = e^{Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey},$$

on pourra, par des équations du premier degré, déterminer les constantes A, B, C, D, E, de telle façon que

$$\varphi(x+2\pi i, y) = e^{-(px+qy+r)}\ \varphi(x, y),$$
$$\varphi(x, y+2\pi i) = e^{-(qx+q'y+r')}\ \varphi(x, y),$$

comme on le vérifie immédiatement. Si l'on pose alors

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y) F(x, y),$$

en tenant compte de la relation

$$p' = q+n,$$

on voit que cette fonction Φ vérifiera les deux relations

$$(2)\quad \begin{cases} \Phi(x+2\pi i, y) = \Phi(x, y), \\ \Phi(x, y+2\pi i) = e^{nx}\,\Phi(x, y); \end{cases}$$

puis, par rapport aux autres paires de périodes α, β et α', β', elle vérifiera deux relations de la forme

$$(3)\quad \begin{cases} \Phi(x+\alpha,\ y+\beta) = e^{ax+b_1 y+c}\ \Phi(x,y), \\ \Phi(x+\alpha',\ y+\beta') = e^{a'x+b'_1 y+c'}\ \Phi(x,y), \end{cases}$$

a, b_1, c, a', b'_1, c' désignant des constantes.

Si, dans la première des relations (3), on change x en $x+2\pi i$, on trouve

$$e^{2a\pi i} = 1 \qquad (a \text{ entier});$$

si ensuite on change y en $y+2\pi i$ en tenant compte de la relation

$$\Phi(x,\ y+2\pi i) = e^{nx}\,\Phi(x,y),$$

on trouve que l'on doit avoir

$$e^{2b_1\pi i} = e^{n\alpha},$$

d'où

$$2b_1\pi i = n\alpha + 2b\pi i \qquad (b \text{ entier}).$$

La seconde des relations (3) montre de même que a' est entier et que l'on a

$$2b'_1\pi i = n\alpha' + 2b'\pi i,$$

b' étant un entier. Les relations (3) s'écrivent donc

$$(4)\quad \begin{cases} \Phi(x+\alpha,\ y+\beta) = e^{ax+by+\frac{n\alpha}{2\pi i}y+c}\ \Phi(x,y), \\ \Phi(x+\alpha',\ y+\beta') = e^{a'x+b'y+\frac{n\alpha'}{2\pi i}y+c'}\ \Phi(x,y), \end{cases}$$

où n, a, b, a', b' sont des nombres entiers. Nous supposons essentiellement que ces cinq nombres entiers ne sont pas tous nuls; car, s'ils étaient nuls, la fonction Φ serait quadruplement périodique de première ou de seconde espèce, ce qui est contraire à l'hypothèse que nous avons faite au commencement. Nous déduirons alors de ces relations (4) une relation entre les périodes d'une importance capitale. Pour cela, dans la première de ces relations, changeons x et y en $x+\alpha'$ et $y+\beta'$, puis tenons compte de la deuxième; nous trouvons, pour le rapport

$$(5)\quad \frac{\Phi(x+\alpha+\alpha',\ y+\beta+\beta')}{\Phi(x,y)}$$

la valeur

$$e^{(a+a')x+(b+b')y+\frac{n}{2\pi i}(\alpha+\alpha')y+c+c'+a\alpha'+b\beta'+\frac{n}{2\pi i}\alpha\beta'}.$$

De même, en changeant dans la seconde des relations (4) x et y en $x+\alpha$ et $y+\beta$, puis tenant compte de la première, on trouve pour le rapport (5) une nouvelle expression qui, comparée à la précédente, donne

$$a\alpha'+b\beta'+\frac{n}{2\pi i}\alpha\beta' = a'\alpha+b'\beta+\frac{n}{2\pi i}\beta\alpha'+2Ni\pi, \tag{6}$$

N désignant un entier.

Cette relation permet de montrer que l'on peut toujours, par une transformation d'un degré convenable, ramener les quatre paires de périodes à être

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (A, B), \quad (A', B'),$$

avec la condition

$$A' = B.$$

3. Pour cela, nous distinguerons deux cas, suivant que l'entier n est nul ou non.

Premier cas : $n = 0$. — Les nombres entiers a, b, a', b' ne sont pas nuls tous les quatre, mais il pourrait arriver que leur déterminant fût nul.

Supposons d'abord le déterminant

$$\delta = ab' - ba'$$

différent de zéro. Les relations (4) étant actuellement

$$\Phi(x+\alpha, y+\beta) = e^{ax+by+c}\,\Phi(x, y),$$
$$\Phi(x+\alpha', y+\beta') = e^{a'x+b'y+c'}\,\Phi(x, y),$$

on en conclut

$$\left\{\begin{array}{l}\Phi(x+a'\alpha-a\alpha', y+a'\beta-a\beta') = e^{-\delta y+\varepsilon'}\,\Phi(x, y),\\ \Phi(x-b'\alpha+b\alpha', y-b'\beta+b\beta') = e^{-\delta x+\varepsilon}\,\Phi(x, y),\end{array}\right. \tag{7}$$

ε et ε' désignant des constantes.

Le déterminant δ n'étant pas nul, prenons pour nouvelles paires de périodes les quantités

$$(2\pi i, 0), \qquad (0, 2\pi i), \qquad (A, B), \qquad (A', B'),$$

où

$$A = b\alpha' - b'\alpha, \qquad B = b\beta' - b'\beta,$$
$$A' = a'\alpha - a\alpha' + 2Ni\pi, \qquad B' = a'\beta - a\beta'.$$

Ces nouvelles périodes sont distinctes comme les périodes primitives, puisque δ est différent de zéro; la fonction Φ vérifie alors les relations

$$\Phi(x + 2\pi i, y) = \Phi(x, y),$$
$$\Phi(x, y + 2\pi i) = \Phi(x, y),$$
$$\Phi(x + A, y + B) = e^{-\delta x + \varepsilon}\,\Phi(x, y),$$
$$\Phi(x + A', y + B') = e^{-\delta y + \varepsilon'}\,\Phi(x, y),$$

et la relation (6), où l'on fait $n = 0$, donne

$$B = A'.$$

Supposons maintenant $\delta = 0$. Nous allons voir que, dans ce cas, il y a réduction, et que la fonction Φ peut être ramenée à une fonction de deux variables doublement périodique de troisième espèce par rapport à l'une des variables, l'autre étant regardée comme une constante. En effet, les quatre nombres a, b, a', b' n'étant pas nuls tous quatre, supposons a' différent de zéro. La relation

$$ab' - ba' = 0$$

montre que, si b' est nul, b l'est aussi. Dans ce cas particulier, la relation (6)

$$a\alpha' + b\beta' = a'\alpha + b'\beta + 2N\pi i$$

donne

$$a\alpha' = a'\alpha + 2N\pi i.$$

La fonction Φ admettrait alors les deux groupes de périodes

$$0, \quad 2\pi i,$$
$$a'\alpha - a\alpha' + 2N\pi i, \quad a'\beta - a\beta',$$

qui se réduiraient à

$$(0, 2\pi i), \quad (0, a'\beta - a\beta');$$

elle serait donc doublement périodique par rapport à y seul.

Si a' et b' sont tous deux différents de zéro, on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{m}{m'},$$

m et m' étant premiers entre eux, et m devant être remplacé par zéro quand a et b sont nuls. Donc

$$a = pm, \quad a' = pm', \quad b = qm, \quad b' = qm',$$

où p et q sont des entiers non nuls. La relation (6) devient alors

$$(8) \qquad m(p\alpha' + q\beta') = m'(p\alpha + q\beta) + 2Ni\pi.$$

Faisons le changement linéaire de variables

$$X = px + qy, \quad Y = y,$$

et adoptons pour x et y les paires de périodes

$$(-2q\pi i, 2p\pi i), \quad (0, 2\pi i), \quad (m'\alpha - m\alpha', m'\beta - m\beta'), \quad (\alpha', \beta').$$

Les paires de périodes correspondantes relatives aux variables X et Y seront, d'après (8), données par le Tableau suivant :

$$\begin{array}{llll} X : A_{11} = 0, & A_{21} = 2q\pi i, & B_{11} = -2Ni\pi, & B_{21} = p\alpha' + q\beta', \\ Y : A_{12} = 2p\pi i, & A_{22} = 2\pi i, & B_{12} = m'\beta - m\beta', & B_{22} = \beta'. \end{array}$$

Si donc N est nul, *deux périodes* relatives à X sont nulles, A_{11} et B_{11} ; si N est différent de zéro, la combinaison

$$NA_{21} + qB_{11}, \quad NA_{22} + qB_{12}$$

donne une paire de périodes dans laquelle la période relative à X est encore nulle. Donc la fonction $\Phi(x, y)$ exprimée en X et Y est *doublement périodique par rapport à* Y *seul*. Il y a donc réduction, comme

nous l'avons annoncé, toutes les fois que le déterminant

$$\delta = ab' - ba'$$

est nul en même temps que n.

Second cas : n différent de zéro. — Reprenons les relations (4)

$$(4)\quad \begin{cases} \Phi(x+2\pi i, y) = \Phi(x, y), \\ \Phi(x, y+2\pi i) = e^{nx}\Phi(x, y), \\ \Phi(x+\alpha, y+\beta) = e^{ax+by+\frac{n\alpha}{2\pi i}y+c}\Phi(x, y), \\ \Phi(x+\alpha', y+\beta') = e^{a'x+b'y+\frac{n\alpha'}{2\pi i}y+c'}\Phi(x, y), \end{cases}$$

et la relation (6) qui lie les périodes

$$(6)\quad a\alpha' + b\beta' + \frac{n\alpha\beta'}{2\pi i} = a'\alpha + b'\beta + \frac{n\beta\alpha'}{2\pi i} + 2Ni\pi.$$

Nous allons ramener les relations (4) à la forme des relations que vérifient les fonctions Θ.

On a, puisque n, a, b sont des entiers,

$$\Phi(x+n\alpha+2b\pi i, y+n\beta-2a\pi i) = e^{ly+k}\Phi(x, y),$$

où l et k désignent des constantes dont la première est

$$l = \frac{n}{2\pi i}(n\alpha+2b\pi i);$$

on trouvera de même

$$\Phi(x+n\alpha'+2b'\pi i, y+n\beta'-2a'\pi i) = e^{l'y+k'}\Phi(x, y),$$

$$l' = \frac{n}{2\pi i}(n\alpha'+2b'\pi i).$$

Prenons, comme paires de périodes,

$$(2\pi i, 0), \quad (0, 2\pi i), \quad (\alpha_1, \beta_1), \quad (\alpha'_1, \beta'_1)$$

en posant

$$\alpha_1 = n\alpha + 2b\pi i, \qquad \beta_1 = n\beta - 2a\pi i,$$
$$\alpha'_1 = n\alpha' + 2b'\pi i, \qquad \beta'_1 = n\beta' - 2a'\pi i;$$

ces nouvelles périodes sont indépendantes comme les premières. Les

relations ci-dessus peuvent alors s'écrire

$$\begin{aligned}
\Phi(x+2\pi i, y) &= \Phi(x, y),\\
\Phi(x, y+2\pi i) &= e^{nx}\,\Phi(x, y),\\
\Phi(x+\alpha_1, y+\beta_1) &= e^{ly+k}\,\Phi(x, y),\\
\Phi(x+\alpha'_1, y+\beta'_1) &= e^{l'y+k'}\,\Phi(x, y),
\end{aligned}$$

$$l = \frac{n\alpha_1}{2\pi i}, \qquad l' = \frac{n\alpha'_1}{2\pi i}.$$

De plus, la relation (6) devient, si l'on y remplace α, β, α', β' par leurs expressions en fonction de α_1, β_1, α'_1, β'_1,

(9) $$\frac{1}{2\pi i}(\beta_1\alpha'_1 - \alpha_1\beta'_1) = 2\mathrm{M}i\pi,$$

M désignant un entier *non nul*, comme nous le verrons plus loin.

La période β_1 n'est pas nulle; car, si l'on avait $\beta_1 = 0$, la fonction Φ serait doublement périodique par rapport à x seul. Si nous posons

$$\Phi_1(x, y) = e^{\lambda y^2+\mu y}\,\Phi(x, y),$$

nous pourrons déterminer λ et μ de façon que $\Phi_1(x, y)$ ne change pas quand on augmente x et y de la paire de périodes α_1, β_1. Nous aurons

$$\lambda = -\frac{l}{2\beta_1} = -\frac{n\alpha_1}{4i\pi\beta_1}.$$

La fonction Φ_1 vérifie alors les relations suivantes, où nous prenons comme second groupe de périodes $(0, 2\mathrm{M}\pi i)$ au lieu de $(0, 2\pi i)$,

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x+2\pi i, y) &= \Phi_1(x, y),\\
\Phi_1(x, y+2\mathrm{M}\pi i) &= e^{\mathrm{M}n\left(x-\frac{\alpha_1}{\beta_1}y\right)+\mathrm{C}}\,\Phi_1(x, y),\\
\Phi_1(x+\alpha_1, y+\beta_1) &= \Phi_1(x, y),\\
\Phi_1(x+\alpha'_1, y+\beta'_1) &= e^{\frac{2\mathrm{M}ni\pi}{\beta_1}y+\mathrm{C}'}\,\Phi_1(x, y),
\end{aligned}$$

où C et C′ désignent des constantes.

Faisons enfin un changement linéaire de variables, en posant

$$\mathrm{X} = x - \frac{\alpha_1}{\beta_1}y, \qquad \mathrm{Y} = \frac{2\pi i}{\beta_1}y,$$

$$\Phi_1(x, y) = \Phi_2(\mathrm{X}, \mathrm{Y}).$$

Les paires de périodes de X et Y correspondant aux paires de périodes (α_1, β_1), (α'_1, β'_1) de x et y sont

$$(0, 2\pi i), \quad \left(\frac{\beta_1\alpha'_1 - \alpha_1\beta'_1}{\beta_1}, \frac{2\pi i\beta'_1}{\beta_1}\right);$$

on voit donc que l'entier M qui figure dans la relation (9) n'est pas nul, car autrement, dans ces deux paires de périodes, les périodes relatives à X seraient *nulles* et la fonction Φ_2 serait doublement périodique en X seul. En formant le Tableau complet des paires de périodes de X et Y correspondant à celles de x et y, on aura :

Périodes de x et y.	Périodes de X et Y.
$(2\pi i, 0)$	$(2\pi i, 0)$
$(0, 2M\pi i)$	(A, B)
(α_1, β_1)	$(0, 2\pi i)$
(α'_1, β'_1)	(A', B')

où l'on a posé

$$A = -\frac{2M\pi i\alpha_1}{\beta_1}, \qquad B = -\frac{4\pi^2 M}{\beta_1},$$

$$A' = \frac{\beta_1\alpha'_1 - \alpha_1\beta'_1}{\beta_1}, \qquad B' = \frac{2\pi i\beta'_1}{\beta_1}.$$

On aura alors

$$\begin{aligned}
\Phi_2(X + 2\pi i, Y) &= \Phi_2(X, Y),\\
\Phi_2(X, Y + 2\pi i) &= \Phi_2(X, Y),\\
\Phi_2(X + A, Y + B) &= e^{Mn X + C}\,\Phi_2(X, Y),\\
\Phi_2(X + A', Y + B') &= e^{Mn Y + C'}\,\Phi_2(X, Y),
\end{aligned}$$

et la relation (9) donnera

$$B = A',$$

ce qu'il fallait démontrer.

En résumé, dans les deux cas, $n = 0$ et $n \gtrless 0$, on peut ramener la fonction Φ, quadruplement périodique de troisième espèce, à vérifier des relations de la même forme que celles que vérifient les fonctions Θ de deux variables, avec la condition de Riemann

$$B = A'.$$

4. Pour donner des exemples de fonctions de deux variables qua-

druplement périodiques de troisième espèce, suivons une méthode analogue à celle qui sert à former l'élément simple dans la théorie des fonctions doublement périodiques de troisième espèce (*Annales de l'École Normale,* 3e série, t. I, II, III), ou, en nous plaçant à un point de vue plus général, imitons ce que fait Halphen dans son *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 468 [1].

Soient α, β, γ trois quantités telles que la partie réelle de la forme quadratique

$$\alpha m^2 + \beta n^2 + 2\gamma mn$$

soit négative pour toutes les valeurs réelles de m et n autres que $m = n = 0$; soit p un nombre entier positif, et $\varphi(u, v)$ une fonction uniforme des deux variables u et v. Si la série

$$\Phi(x, y) = \sum_{m, n = -\infty}^{m, n = +\infty} e^{p(\alpha m^2 + \beta n^2 + 2\gamma mn + mx + ny)} \varphi(e^{x + 2m\alpha + 2n\gamma}, e^{y + 2m\gamma + 2n\beta})$$

est convergente, elle définit une fonction uniforme de x et y vérifiant les quatre relations

$$\begin{aligned}
\Phi(x + 2\pi i, y) &= \Phi(x, y), \\
\Phi(x, y + 2\pi i) &= \Phi(x, y), \\
\Phi(x + 2\alpha, y + 2\gamma) &= e^{-p(x+\alpha)} \Phi(x, y), \\
\Phi(x + 2\gamma, y + 2\beta) &= e^{-p(y+\beta)} \Phi(x, y);
\end{aligned}$$

cette fonction est donc quadruplement périodique de troisième espèce. Lorsque la fonction $\varphi(u, v)$ est un polynôme en u, v, $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$, la fonction Φ est composée linéairement avec des fonctions Θ de deux variables. Lorsque la fonction $\varphi(u, v)$ est rationnelle, la fonction Φ possède des singularités essentielles à distance finie. Par exemple, on pourra prendre pour $\varphi(u, v)$ les expressions

$$\frac{1}{1+u}, \quad \frac{1}{1+v}, \quad \frac{1}{(1+u)(1+v)}, \quad \ldots, \quad \frac{u^a v^b}{(1+u)^{a'}(1+v)^{b'}},$$

a, b, a', b' désignant des entiers positifs. En supposant α, β, γ réels,

---

(1) *Voyez* une Note que j'ai présentée à l'Académie des Sciences le 25 mars 1889 (*Comptes rendus*, t. CVIII).

les fonctions Φ correspondantes possèdent les surfaces de singularités

$$x'' = (2h + 1)\pi, \qquad y'' = (2k + 1)\pi,$$

où l'on a posé $x = x' + ix''$, $y = y' + iy''$ et où h et k désignent des entiers quelconques. L'hypothèse $a = b = 1$, $a' = b' = 2$ fournit une fonction de troisième espèce, analogue à la fonction de première espèce que M. Picard donne comme exemple dans sa Note du 18 mars 1889 (*Comptes rendus*, t. CVIII) [1].

---

[1] *Voyez* aussi *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XVII, p. 131.

Bertrand — Sur le nombre des valeurs d'une fonction

Puiseux — Recherches sur les fonctions algébriques.

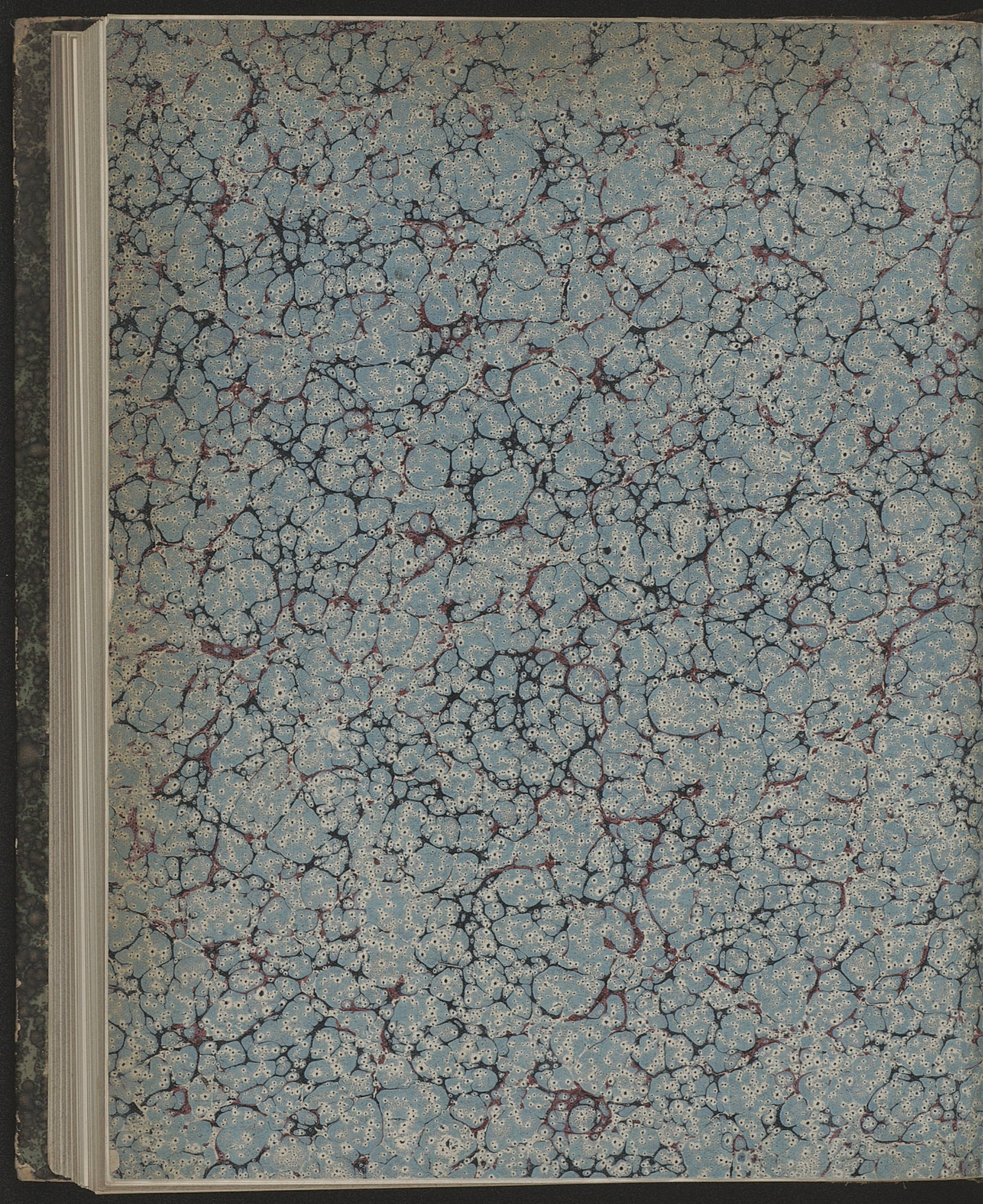
Poincaré — Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires.

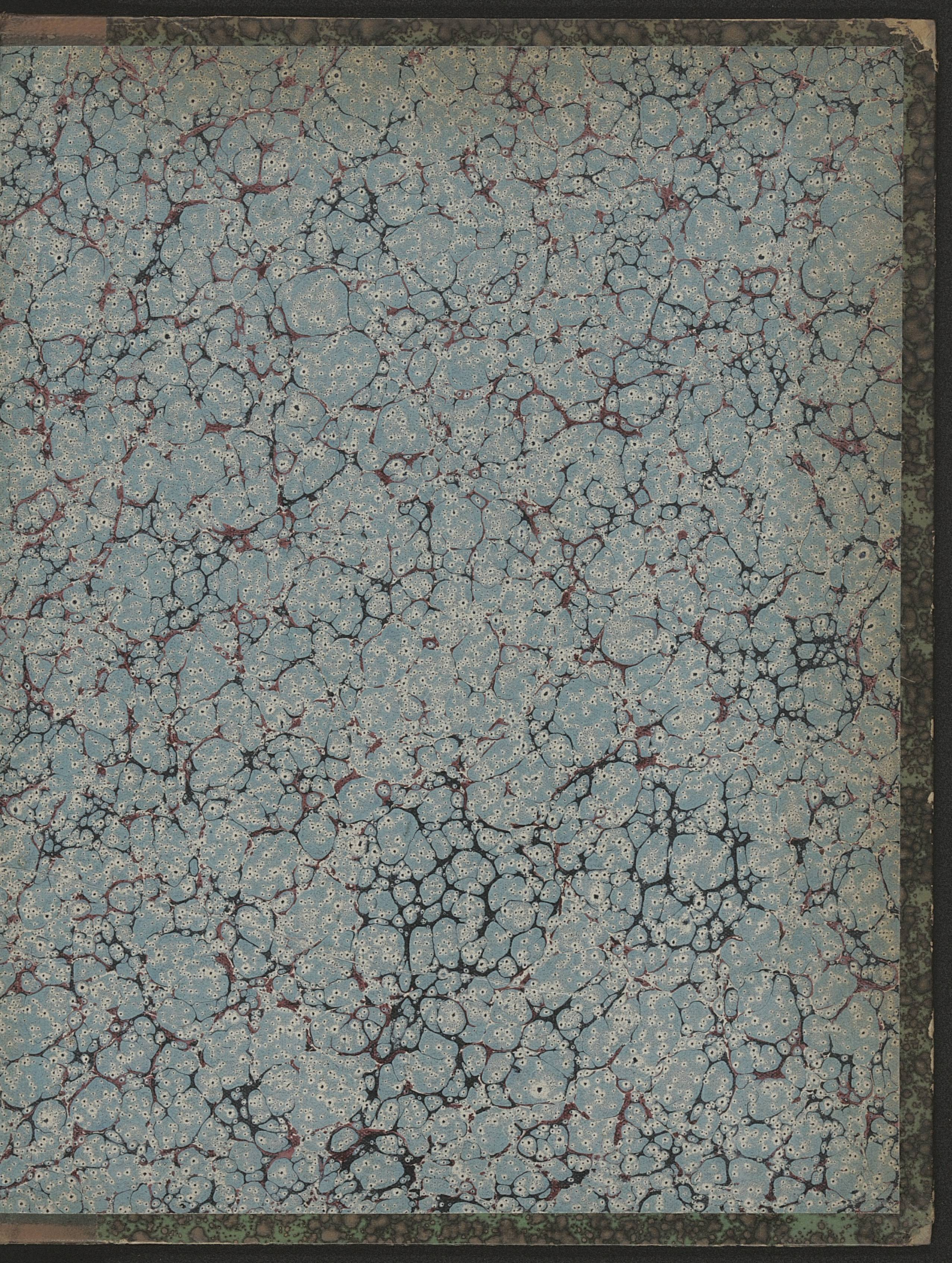
id — Réduction simultanée d'une forme linéaire et d'une forme quadratique.

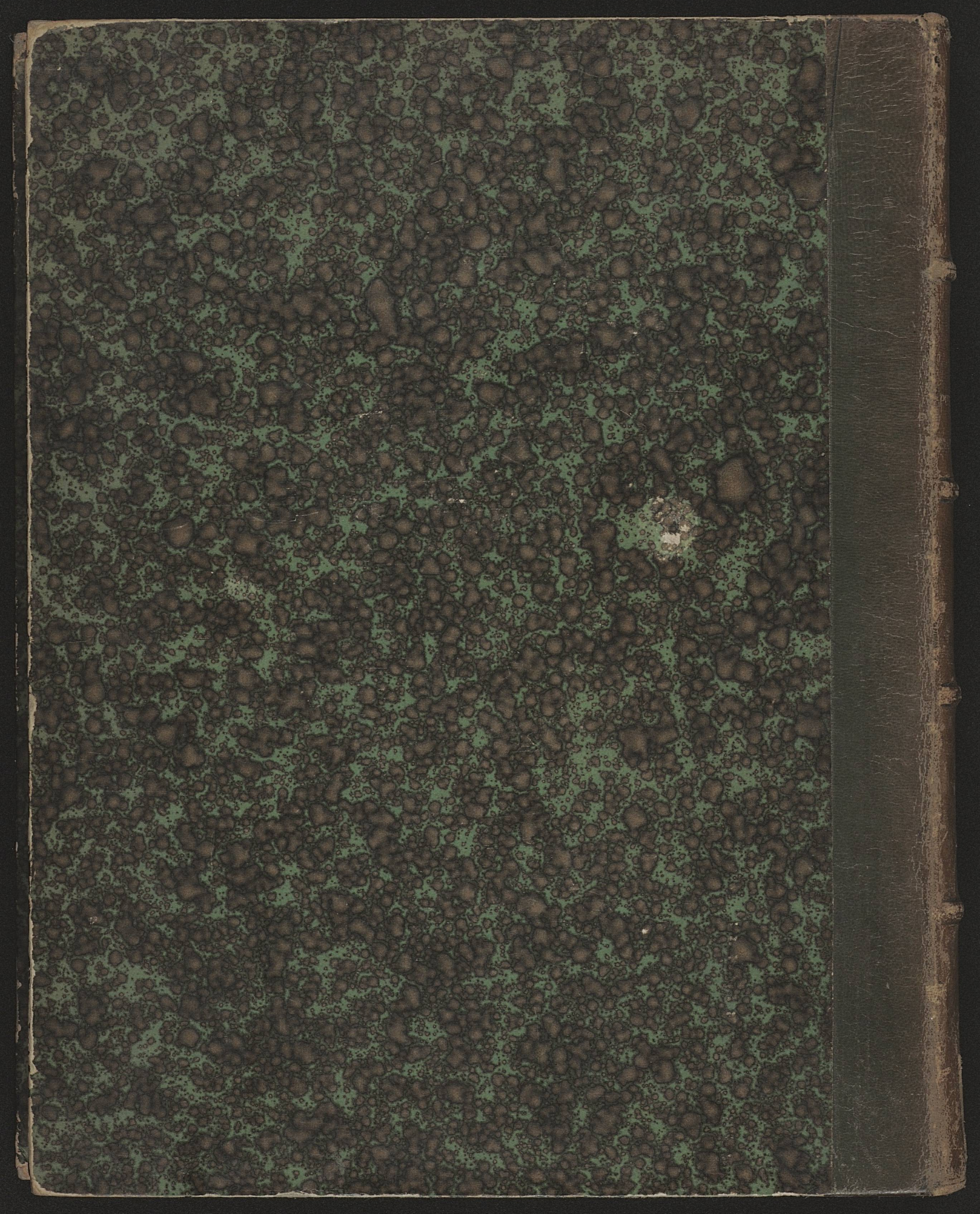
id — Fonctions à espaces lacunaires.

Sarrau — Propagation et polarisation de la lumière dans les cristaux

Appell — Fonctions de deux variables quadruplement périodiques de troisième espèce —








MÉMOIRES
PUISEUX-BERTRAND
SARRAU-POINCARÉ



inches 4 3 2 1 0 — 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 centimeters

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 (A)	12	13	14	15
L*	39.12	65.43	49.87	44.26	55.56	70.82	63.51	39.92	52.24	97.06	92.02	87.34	82.14	72.06	62.15
a*	13.24	18.11	-4.34	-13.80	9.82	-33.43	34.26	11.81	48.55	-0.40	-0.60	-0.75	-1.06	-1.19	-1.07
b*	15.07	18.72	-22.29	22.85	-24.49	-0.35	59.60	-46.07	18.51	1.13	0.23	0.21	0.43	0.28	0.19
Density →										0.04	0.09	0.15	0.22	0.36	0.51

D50 Illuminant, 2 degree observer

Golden Thread

	16 (M)	17	18 (B)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
L*	49.25	38.62	28.86	16.19	8.29	3.44	31.41	72.46	72.95	29.37	54.91	43.96	82.74	52.79	50.87
a*	-0.16	-0.18	0.54	-0.05	-0.81	-0.23	20.98	-24.45	16.83	13.06	-38.91	52.00	3.45	50.88	-27.17
b*	0.01	-0.04	0.60	0.73	0.19	0.49	-19.43	55.93	68.80	-49.49	30.77	30.01	81.29	-12.72	-29.46
Density	0.75	0.98	1.24	1.67	2.04	2.42									

Colors by Munsell Color Services Lab

Don Williams